

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ДЕРЖАВНЕ НЕКОМЕРЦІЙНЕ ПІДПРИЄМСТВО «ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**«КИЇВСЬКИЙ АВІАЦІЙНИЙ ІНСТИТУТ»**

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

Сун Лінь

УДК 532.526.72

**ДИСЕРТАЦІЯ**

Моделювання та розрахунок процесів обтікання просторових тіл  
зі складною геометрією поверхні

спеціальність 134 Авіаційна та ракетно-космічна техніка

Галузь знань 13 Механічна інженерія

Подається на здобуття наукового ступіня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

Сун Лінь Л. Сун

Науковий керівник Лук'янов Павло Володимирович, кандидат фізико-  
математичних наук, старший науковий співробітник



Київ – 2024

## АНОТАЦІЯ

Сун Лінь. Моделювання та розрахунок процесів обтікання просторових тіл зі складною геометрією поверхні. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 134 «Авіаційна та ракетно-комічна техніка».

Дисертаційна робота присвячена вивченню нестисливої течії рідини в примежовому шарі, що утворюється поблизу поверхні тіла під час його руху у нерухомій рідині.

За допомогою теоретичних фізико-математичних методів, отримано нові моделі нестисливої течії рідини у примежовому шарі. На підста цих моделей сформульовані відповідні задачі та знайдено їх розв'язки.

**У першому розділі** здійснено критичний огляд наукових досліджень за тематикою дисертації.

**У другому розділі** представлено оригінальний підхід до дослідження проблеми внутрішнього тертя, що виникає при русі твердого тіла в нестисливій рідині. Такий підхід враховує просторову мінливість молекулярної в'язкості в області примежового шару, а розв'язок задачі базується на використанні екстремуму для функціонала витрати рідини. Просторова мінливість молекулярної в'язкості в примежовому шарі, за відомою аналогією з теорією теплопровідності, заснована на відсутності просторової ізотропії середовища. Показано, що молекулярна в'язкість залежить від характеру течії - від того, скільки сил діє на рідину. Отже, якщо течія нестационарна і без-градієнтна або стаціонарна і градієнтна, то на обидва ці течії обумовлені двома силами. У таких течіях молекулярна в'язкість, через екстремум швидкості течії рідини, є (може бути) постійною величиною. Відомо, що розподіл швидкості в градієнтному стаціонарному примежовому шарі має параболічний закон розподілу, і всі існуючі теорії описуються цим законом досить точно, з похибкою максимум 5%. Водночас у ламінарному без-градієнтному примежовому шарі на рідину діє лише

сила внутрішнього тертя. Це обумовлює просторову мінливість молекулярної в'язкості: напруження зсуву може бути сталим не тільки завдяки лінійності розподілу швидкості, який не спостерігається в примежовому шарі, а й завдяки мінливості молекулярної в'язкості. Експоненціальний розподіл швидкості у безградієнтному примежовому шарі, що отримується у результаті, повністю узгоджується з подібними в задачах, розв'язаних Стоксом, а також підтверджується експериментально. Щойно вказаний експоненціальний закон узгоджується з сучасними даними, отриманими шляхом прямого чисельного моделювання (DNS) для течій з відносно низькими числами Рейнольдса (ламінарний рух) - як однофазних, так і двофазних, за наявності частинок усередині рідини.

Крім стаціонарного руху тіла в рідині важливим є і нестаціонарний рух, коли тіло прискорюється або уповільнюється. Наводяться два підходи до опису ламінарної нестаціонарної течії нестисливої рідини в примежовому шарі. У першому підході в'язкість рідини і прискорення, з яким приводиться в рух площина, вважають сталими (класичний, або загально-відомий підхід). По суті, це задача Релея. Розв'язок, отриманий на основі цих припущень, асимптотично збігається до відомого автотельного розв'язку Стокса. Важливо, що розв'язки Стокса і Релея асимптотично при великих значеннях часу відповідають зникненню напружень зсуву між рідиною і рухомою площиною після прискорення. Виходить парадокс: виведені Стоксом рівняння для опису внутрішнього тертя свідчать про відсутність того самого тертя між рухомим тілом і рідиною. Оскільки при дослідженні методами варіаційного числення виявилось, що всередині стаціонарного примежового шару молекулярна в'язкість повинна залежати від відстані до рухомої поверхні, була розглянута відповідна нестаціонарна задача. У результаті, як і раніше для стаціонарного випадку, отримані розв'язки, що описують як без-градієнтну, так і градієнтну течії нестисливої рідини в примежовому шарі. Асимптотичний аналіз переходу до стаціонарної течії свідчить про узгодженість цих розв'язків. Для випадку без-

градієнтної течії проведено порівняння класичного розв'язку з розв'язком, що відповідає екстремуму витрати рідини, що переноситься рухомою поверхнею. Показано, що згідно з розв'язком, отриманим на основі варіаційного підходу, напруження зсуву на поверхні після встановлення руху нікуди не зникає, а, як і очікувалося, набуває сталого значення. Методи дослідження є суто теоретичними, а результати аналізуються шляхом порівняння з наявними теоретичними та експериментальними даними та відповідністю до фундаментальних законів фізики, зокрема закону збереження енергії. Ці методи базуються на побудові аналітичних математичних моделей, що представляють собою диференціальні рівняння в частинних похідних, доповнених відповідними фізичними початковими та граничними умовами. Крім того, використовуються диференціальні рівняння Ейлера теорії екстремуму функціонала (в даній роботі це екстремум витрати рідини поперек перерізу примежового шару). При розв'язуванні цих рівнянь використовується відомий метод розділення змінних Фур'є. Довільні функції часу, що виникають при частинному інтегруванні (за однією зі змінних – просторовою координатою), визначаються з умов асимптотичної прямування розв'язків нестационарних задач до відповідних до них розв'язків стаціонарних задач.

Оскільки тема роботи містить терміни «складна геометрія», то до моделей течій, що викликані рухом площини, додані такі, що відповідають криволінійним поверхням. Перша – течія у примежовому шарі біля нескінченної криволінійної поверхні. Друга модель описує область розвитку течії у примежовому шарі на криволінійній поверхні обертання (фюзеляж літака, корпус ракети). Основний моментом є те, що, як відомо, структура примежового шару на поверхні (обертання) за умови збільшення перерізу (як у передній частині фюзеляжу) є, з високою точністю. Такою самою, як і на плоскій поверхні. Це обумовлено тим, що кривина поверхні досить мала, а товщина примежового шару (кілька десятків міліметрів) не відчуває цієї кривизни.

**У третьому розділі** розглядається важлива для авіаційної та ракетно-космічної техніки (та і в цілому для будь якої техніки) так звана задача про область розвитку нестисливої течії рідини. Як з'ясувалося під час досліджень, ця течія являє собою приклад, де пряме застосування рівнянь Нав'є-Стокса без-градієнтної ламінарної нестисливої течії рідини, у якому молекулярна в'язкість вважається сталою величиною, що не залежить від просторових координат, призводить до пере-визначення математичної моделі. Йдеться про примежовий шар рідини в області встановлення течії в задачі про рух пів-нескінченої площини, де градієнт тиску рівний нулеві. Наявна ситуація, коли кількість рівнянь дорівнює трьом (два рівняння збереження кількості руху і рівняння нерозривності), а кількість невідомих дорівнює двом – числу компонент швидкості. У якості логічного розв'язання отриманої невідповідності запропоновано, як вже до цього було зроблено для задачі про стаціонарний рух площини і задачі про розгін площини, відійти від хибного твердження про сталість молекулярної в'язкості в без-градієнтному примежовому шарі нестисливої течії та вважати молекулярну в'язкість функцією просторових координат. Необхідність в урахуванні змінного характеру молекулярної в'язкості призвела до відкриття ще одного, другого, недоліку теорії Нав'є-Стокса. Цей нетривіальний недолік було виявлено під час застосування оригінального чисельно-аналітичного методу розв'язання задачі про течію рідини в області встановлення руху. Як відомо, рівняння Нав'є-Стокса доповнюються граничними умовами. Найважливішою умовою є умова прилипання (не ковзання) рідини на поверхні твердого тіла, яка, до речі (джерело – наукові статті провідних світових журналів), не впливає ні з якого фізичного закону. В результаті на поверхні пів-площини (або тіла), що рухається, складова швидкості, що співпадає із напрямком руху, має стале значення, яке дорівнює швидкості тіла. З рівняння нерозривності одразу впливає, що нормальна похідна від нормальної компоненти швидкості повинна бути рівною нулеві уздовж поверхні площини (тіла), так як повздовжня похідна від повздовжньої

компоненти швидкості перетворюється на нуль. Однак, цілком очевидно (загально відомо), що нормальна до поверхні площини (тіла) компонента швидкості змінюється поперек примежового шару – в області розвитку течії, що означає наявність нормального градієнту (обох складових) швидкості. Конфлікт, або протиріччя, долається шляхом відходу від загальноприйнятої умови прилипання до умови часткового прилипання, або по суті наявності ковзання. Так як і при різкому гальмуванні будь якого транспортного засобу повна зупинка відбувається не миттєво, а за деякий скінчений час и шлях, то і в випадку руху тіла в нерухомій рідині відбувається не миттєве прилипання, а поступове – від повного ковзання, коли частинка рідини щойно зустрілася із рухомою площиною, до повного прилипання наприкінці ( і далі) області розвитку течії.

Оскільки використання моделі течії нестисливої рідини обмежене числом Маха, для подальшого розширення діапазону швидкостей було розглянуто задачу про область розвитку слабо стисливої течії рідини в примежовому шарі. Аналітично доведено, що всі міркування щодо неможливості повного прилипання в області розвитку течії можна застосувати до слабо стисливої течії. Слабка стисливість при цьому означає дозвуковий характер течії та неврахування температурних впливів через тертя. На основі критичного аналізу існуючих підходів, які розглядають обтікання рідини навколо нерухомої пластини в рамках без-градієнтної течії (що просто неможливо через відсутність механізму створення руху рідини) ), показано, що система рівнянь насправді є незамкнутою. Для області розвитку потоку, де поздовжній градієнт тиску не є постійною величиною, одне рівняння відсутнє. Це рівняння, як і в попередніх роботах, отримано з необхідної умови екстремуму функціоналу витрати рідини. І хоча повний розв'язок для поздовжньої складової швидкості містить чотири константи інтегрування, для отримання асимптотики поблизу твердої поверхні достатньо знати лише дві величини – швидкість та її першу похідну (градієнт). Ці значення, як виявляється з асимптотичного розв'язку, збігаються з випадком

нестисливої течії рідини, що дозволяє розширити область застосування отриманих раніше результатів для більш широкої області чисел Маха, наприклад Це рівняння, як і в попередніх роботах, отримано з необхідної умови екстремуму функціоналу витрати рідини. І хоча повне рішення для поздовжньої складової швидкості містить чотири константи інтегрування, для отримання асимптотики поблизу твердої поверхні достатньо знати лише дві величини – швидкість та її першу похідну (градієнт). Ці значення, як виявляється з асимптотичного розв'язку, збігаються з випадком течії нестисливої рідини, що дозволяє розширити область застосування отриманих раніше результатів для більш широкої області чисел Маха, наприклад Це рівняння, як і в попередніх роботах, отримано з необхідної умови екстремуму функціоналу витрати рідини. І хоча повне рішення для поздовжньої складової швидкості містить чотири константи інтегрування, для отримання асимптотики поблизу твердої поверхні достатньо знати лише дві величини – швидкість та її першу похідну (градієнт). Ці значення, як виявляється з асимптотичного розв'язку, збігаються з випадком течії нестисливої рідини, що дозволяє розширити область застосування отриманих раніше результатів для більш широкої області чисел Маха, наприклад 0.5—0.6 Ма. А такі значення вже відповідають швидкостям сучасних цивільних літаків. Наведено безрозмірний розподіл тиску в області розвитку слабо стисливої течії та показано його значну неоднорідність, що, у свою чергу, свідчить про важливість отриманих результатів.

**У четвертому розділі** розглянуто низка моделей вихрових течій, що утворюються під час польоту літака. Спочатку це дрібномасштабні вихорі у примежовому шарі, але потім із них формуються великомасштабні компактні вихрові структури. Тому у даній роботі розроблені компактні аналоги моделей вихрових течій, якими користуються при моделюванні вихрових структур, що спостерігаються під час польоту літака та руху тіла в рідині. Зокрема висвітлюються два значних непорозуміння, що панують в цій області науки. Перше непорозуміння полягає у тому, що стаціонарний рух рідких частинок по

колу ототожнюється із нев'язким вихровим. Отже, будь яка модель вихрової течії, яка в явному вигляді не містить в'язкість, вважається такою, що описує нев'язкий вихровий рух. Доведено, що це не так: стаціонарний в'язкий рух рідких частинок по колових орбітах відповідає само-балансу однієї сили -- сили в'язкості. Цей висновок, в явній формі, зроблено вперше. І він є дуже важливим, оскільки змінює наші уявлення про баланс сил, де обов'язково мають бути присутні дві або більше сили різної природи. Саме подолання цього непорозуміння відкриває шлях до створення компактних аналогів існуючих моделей вихрових рухів, в яких сила в'язкості здатна стримувати рух у скінченій області простору. На цьому шляху було усунуто ще одне – друге загальне нерозуміння в області вихрової динаміки. Скрізь, де б ми не прочитали, то побачимо, що компактність вихрової течії ототожнюється із компактністю поля завихрення. Цьому сприяє той факт, що розглядаються рівняння для завихрення, а не швидкості. В результаті, за винятком однієї-двох, всі моделі вихорів відповідають обертанню всього простору, аж до нескінченності, порушуючи фундаментальний закон фізики – закон збереження та перетворення енергії. Мова йдеться про те, що, у якості другого нерозуміння, припускається помилка при обчисленні кінетичної енергії вихрової течії: не враховується якобіан у циліндричних (полярних) координатах. Як, наслідок, всі зазначені моделі вихрових течій, що відповідають гіперболічному закону у якості своєї асимптотики в області периферії, мають нескінчену кінетичну енергію. Звичайно, це аж ніяк не відповідає утворенню та еволюції компактних вихрових структур. Тому в роботі, на підставі подолання зазначених нерозумінь, наводяться ряд вже відомих моделей компактних вихрових течій, а також ті, що вперше отримані. Зокрема, це стосується турбулентної вихрової течії при утворенні вихрової пелени, компактних аналогів вихору Бюргерса-Ротта -- як класичного, що відповідає ламінарному рухові, так і того, що складається із ламінарної течії в ядрі та турбулентної течії на периферії вихору.

**У висновках** наведені основні результати даної роботи



**Ключові слова:** літак, гвинтокрил, рівняння Нав'є-Стокса, нестислива течія, слабо стислива течія, область розвитку течії, примежовий шар, змінна молекулярна в'язкість, компактні вихрові течії, розподіл тиску, втомні навантаження, деформація поверхні

### СПИСОК ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА

1. Lukianov P.V., Song L. Optimal Character and Different Nature of Flows in Laminar Boundary Layers of incompressible Fluid Flow *Problems of Friction and Wear*. 2022. № 4(97). P. 52-60.
2. Lukianov Pavlo, Song Lin. Unsteady Incompressible Laminar Boundary Layer: Time and Space Variable Molecular Viscosity. *Авіаційно-Космічна Техніка і Технологія*. 2023. № 3(187). С. 50—60.
3. Lukianov Pavlo, Song Lin. Compact analogs of the models of vortex flows generated by aircraft flight. *Авіаційно-Космічна Техніка і Технологія*. 2023. № 5(191). С. 4—20.
4. Lukianov Pavlo, Song Lin. Flow development region in the boundary layer: two-component molecular viscosity and partial slip. *Авіаційно-Космічна Техніка і Технологія*. 2023. № 6(192). С. 38—47.
5. Song L., Lukianov P.V., Badakh V.M., Tarasenko T.V. The effect of partial slip on the surface pressure distribution in a slightly compressible flow development region in the boundary layer. *Problems of Friction and Wear*. 2024. №3(104). P. 54-64.
6. Лук'янов П.В., Сунь Л. Стационарна оптимальна турбулентна течія у плоскому каналі: аналітичний розв'язок на підставі моделі Рейнольдса-Буссинеска. *Гідроаеромеханіка в інженерній практиці: матеріали XXVI міжнародної наук.-техн. конф., м. Київ, 7--10 вересня 2021 р. Київ-Херсон, 2021. С. 201--203.*
7. Лук'янов П.В., Сунь Л. Стационарна оптимальна турбулентна течія у круглій трубі: аналітичний розв'язок на підставі моделі Рейнольдса-Буссинеска.

*Гідроаеромеханіка в інженерній практиці*: матеріали XXVI міжнародної наук.-техн. конф., м. Київ, 7--10 вересня 2021 р. Київ-Херсон, 2021. С. 204--206.

8. Лук'янов П.В., Сун Л. Чисельне знаходження розв'язку для стаціонарного ламінарного граничного шару нестисливої рідини на циліндричній поверхні. *Комп'ютерна гідромеханіка*: матеріали VIII міжнародної наук.-практ. конф. м. Київ, 27-28 вересня 2022 р. Київ, 2022. С. 53-54.

9. Лук'янов П.В., Сунь Л. Турбулентний примежовий шар стаціонарної течії нестисливої рідини. *Промислова гідравліка і пневматика*: матеріали XXIII міжнародної наук.-техн. конф. АС ПГП, м. Київ, 15-16 грудня 2022 р. Київ, 2022. С. 41.

10. Лук'янов П.В., Сунь Л. Просторова залежність молекулярної в'язкості в ламінарній течії Куетта. *Промислова гідравліка і пневматика*: матеріали XXIII міжнародної наук.-техн. конф. АС ПГП, м. Київ, 15-16 грудня 2022 р. Київ, 2022. С. 42-43.

11. Лук'янов П.В., Сунь Л. Ламінарна течія в'язкої нестисливої рідини внаслідок рівномірного розгону площини. *Гідроаеромеханіка в інженерній практиці*: матеріали XXVII міжнародної наук.-техн. конф., м. Київ, 31 травня – 2 червня 2023 р. Київ, 2023. С.15--17.

12. Lukianov P., Song L. Pressure field distribution in incompressible flow development region of laminar boundary layer. *Computer Hydromechanics*: materials of IX Intern. Conf. Kyiv, October 1—2, 2024. Kyiv, 2024. p. 109-110.

## ANNOTATION

Song Lin. Modeling and calculation of processes of flow around spatial bodies with complex surface geometry. – Qualifying scientific work on manuscript rights.

Dissertation for obtaining the scientific degree of Doctor of Philosophy in specialty 134 "Aviation and rocket and space technology".

The dissertation is devoted to the study of incompressible and slightly compressible fluid flow in the boundary layer, which is formed near the surface of a body during its motion in a still fluid.

By theoretical means of physics and mathematics new models of incompressible and slightly compressible fluid flow in the boundary layer were obtained. On the basis of these models, relevant problems were formulated and their solutions were found.

**First chapter** includes critical analysis of scientific researches on the dissertation topic.

**In second chapter**, an original approach to the study of the problem of internal friction, which occurs during the motion of a solid body in an incompressible liquid, is presented. This approach takes into account the spatial variability of the molecular viscosity in the boundary layer region, and the solution of the problem is based on the use of the extreme for the fluid flow functional. Spatial variability of molecular viscosity in the boundary layer, by analogy with the theory of thermal conductivity, is based on the absence of spatial isotropy of the medium. It is shown that the molecular viscosity depends on the nature of the flow - on how many forces act on the fluid. So, if the flow is unsteady and non-gradient or steady and gradient, then two forces act on both of these flows. In such flows, the molecular viscosity due to the extreme of the fluid flow rate is (can be) a constant value. It is known that the velocity distribution in a gradient stationary boundary layer has a parabolic distribution law, and all existing theories are described by this law quite accurately, with a maximum error of 5%. At the same time, in a laminar non-gradient boundary layer, only the force of internal friction acts on the fluid. This determines the spatial variability of the molecular viscosity: the shear stress can be constant not only due to the linearity of the velocity distribution, which is not observed in the boundary layer, but also due to the variability of the molecular viscosity. The exponential velocity distribution in the non-gradient boundary layer obtained as a result is entirely consistent with similar problems solved by Stokes and is also confirmed experimentally. The exponential law just indicated is consistent with current data obtained by direct numerical simulation (DNS) for flows

with relatively low Reynolds numbers (laminar motion) - both single-phase and two-phase, in the presence of particles within the fluid.

In addition to the stationary motion of the body in the fluid, the non-stationary motion, when the body accelerates or decelerates, is also important. Two approaches to describing the laminar unsteady flow of an incompressible fluid in the boundary layer are given. According to the first approach, the viscosity of the fluid and the acceleration with which the plane is set in motion are considered constant (classical or well-known approach). In essence, this is Rayleigh's problem. The solution obtained on the basis of these assumptions asymptotically converges to the well-known self-similar Stokes solution. It is important that the Stokes and Rayleigh solutions asymptotically at large time values correspond to the disappearance of the shear stresses between the fluid and the moving plane after acceleration. A paradox emerges: the equations derived by Stokes to describe internal friction indicate the absence of the same friction between a moving body and a fluid. Since the research using the methods of calculus of variation revealed that the molecular viscosity inside the stationary boundary layer should depend on the distance to the moving surface, the corresponding non-steady problem been considered. As a result, as before for the steady case, solutions describing both non-gradient and gradient flows of incompressible fluid in the boundary layer are obtained. The asymptotic analysis of the transition to the steady flow testifies to the consistency of these solutions. For the case of non-gradient flow, a comparison of the classical solution with the solution corresponding to the extreme of fluid rate carried by the moving surface is made. It is shown that according to the solution obtained on the basis of the calculus of variation approach, the shear stress on the surface does not disappear anywhere after the motion is established, but as expected, acquires a constant value. The research methods are entirely theoretical, and the results are analyzed by comparison with available theoretical and experimental data and compliance with the fundamental laws of physics, in particular the law of conservation of energy. These methods are based on the construction of analytical mathematical models, which are differential equations in partial derivatives

supplemented with appropriate physical initial and boundary conditions. In addition, Euler's differential equations of the functional extreme theory are used (in this paper, this is the extreme of fluid rate across the cross-section of the boundary layer). When solving these equations, the well-known Fourier method of separation of variables is used. Arbitrary functions of time that arise during partial integration (by one of the variables – the spatial coordinate) are determined from the conditions of asymptotic limit of the solutions of non-steady problems to the corresponding solutions of steady problems.

Since the topic of the work contains the terms "complex geometry", to the models of flows caused by the movement of planes, those corresponding to curved surfaces are added. The first is the flow in the boundary layer near an infinite curved surface. The second model describes the region of flow development in the boundary layer on a curved surface of rotation (plane fuselage, rocket body).

**In the third chapter**, the so-called flow development region problem, very important for aviation and rocket technics (and for any other technics), is considered. Special the fact that in the boundary layer there is always a so-called region of development of incompressible and slightly compressible fluid flow is important. As it turned out during the research, this flow represents an example where direct application of the Navier-Stokes equations of non-gradient laminar incompressible fluid flow, in which the molecular viscosity is assumed to be a constant value independent of spatial coordinates, leads to redefinition of the mathematical model. It is about the fluid boundary layer in the region of flow development region in the problem of the motion of a semi-infinite plane, where the pressure gradient is zero. There is a situation when the number of equations is equal to three (two equations of momentum conservation and the continuity equation (or mass conservation)), and the number of unknowns is equal to two - the number of the velocity component. As a logical solution to the obtained inconsistency, it is proposed, as it was done before for the problem of steady motion of a plane and the problem of acceleration of a plane, to depart from the false statement about the constancy of molecular viscosity in the non-

gradient boundary layer of an incompressible and slightly compressible flow and consider the molecular viscosity in boundary layer as a function of spatial coordinates. The need to take into account the variable nature of molecular viscosity led to the discovery of another, second, flaw in the Navier-Stokes theory. This non-trivial flaw was discovered during the application of the original numerical analytical method for solving the problem of fluid flow in flow development region of. As is known, the Navier-Stokes equations are supplemented by boundary conditions. The most important condition is the condition of fluid non-slip (not sliding) on the surface of a solid body, which, by the way (source – scientific articles of leading world journals), does not follow from any physical law. As a result, on the surface of a moving half-plane (or body), the component of the velocity that coincides with the direction of movement has a constant value equal to the velocity of the body. It immediately follows from the continuity equation that the normal derivative of the normal component of the velocity must be equal to zero along the surface of the plane (body), since the longitudinal derivative of the longitudinal component of the velocity becomes zero. However, it is quite obvious (generally known) that the velocity component normal to the surface of the plane (body) changes across the boundary layer - in the flow development region, which means the presence of a normal gradient (both components) of the velocity. The conflict, or contradiction, is overcome by moving away from the generally accepted condition of non-slip to the condition of partial slip, or essentially the presence of sliding. Since even with the sudden braking of any vehicle, a complete stop does not occur instantly, but after some finite time and distance, so in the case of the motion of a body in a still fluid, there is not an instant sticking, but a gradual one - from complete sliding, when a fluid parcel has just met with a moving plane, until complete adhesion at the end (and downstream) of the region of flow development.

Since the use of the incompressible fluid flow model is restricted by the Mach number, to further expand the speed range, the problem of the of slightly compressible fluid flow development region in the boundary layer was considered. It is analytically

proven that all considerations regarding the impossibility of complete non-slip in the flow development region can be applied to a slightly compressible flow. Slight compressibility at the same time means the subsonic nature of the flow and the neglect of temperature effects due to friction. On the basis of a critical analysis of the existing approaches, which consider the flow of a fluid around an immobile plate in the framework of non-gradient flow (which is just impossible due to the lack of a mechanism for creating the motion of the fluid), it is shown that the system of equations is actually non-closed. For the region of flow development, where the longitudinal pressure gradient is not a constant value, one equation is missing. This equation, as in previous works, is obtained from the necessary condition for the extreme of the fluid rate functional. And although the complete solution for the longitudinal component of the velocity contains four constants of integration, to obtain the asymptotics near the solid surface it is sufficient to know only two quantities - the velocity and its first derivative (gradient). These values, as it turns out from the asymptotic solution, coincide with the case of incompressible flow, which allows us to expand the scope of the previously obtained results for a wider domain of Mach numbers, for example  $Ma=0.5-0.6$ . And such values already correspond to the speeds of modern civil aircraft. The dimensionless distribution of pressure in the slightly compressible flow development region is presented and its significant heterogeneity is shown, which, in turn, indicates the importance of the obtained results.

**In fourth chapter**, a number of models of vortex flows that are generated by aircraft flight, are considered. At first, these are small-scale vortices in the boundary layer, but then large-scale compact vortex structures are formed from them. Therefore, compact analogs of vortex flow models, which are used in modeling vortex structures observed during aircraft flight and body motion in a fluid, have been developed in this work. In particular, two significant misunderstandings prevailing in this area of science are highlighted. The first misunderstanding is that the steady motion of fluid particles along circle orbits is equated with a non-viscous vortex. Therefore, any vortex flow model that does not explicitly include viscosity is considered to describe non-viscous

vortex motion. It has been proven that this is not so: the steady viscous motion of fluid particles along circular orbits corresponds to the self-balance of one force - the force of viscosity. This conclusion, in an explicit form, was made for the first time. And it is very important, because it changes our ideas about the balance of force, where two or more forces of different nature must necessarily be present. It is the overcoming of this misunderstanding that opens the way to the creation of compact analogs of existing models of vortex motions, in which the force of viscosity is capable of restraining motion in a finite region of space. On this way, one more - the second general misunderstanding in the field of vortex dynamics was eliminated. Wherever we read, we will see that the compactness of the vortex flow is identified with the compactness of the vorticity field. This is facilitated by the fact that the equations for vorticity and not velocity are considered. As a result, with the exception of one or two, all models of vortices correspond to the rotation of all space, up to infinity, violating the fundamental law of physics - the law of conservation and transformation of energy. It is about the fact that, as a second misunderstanding, an error is assumed when calculating the kinetic energy of the eddy current: the Jacobian in cylindrical (polar) coordinates is not taken into account. As a consequence, all the mentioned models of vortex flows, corresponding to the hyperbolic law as their asymptotic in the peripheral region, have infinite kinetic energy. Of course, this does not correspond to the formation and evolution of compact vortex structures. Therefore, on the basis of overcoming these misunderstandings, the work presents a number of already known models of compact vortex flows, as well as those obtained for the first time. In particular, this applies to the turbulent vortex flow during the formation of a vortex sheet, compact analogues of the Burgers-Rott vortex - both the classical one corresponding to laminar motion and the one consisting of a laminar flow in the core and a turbulent flow on the periphery of the vortex.

**Conclusions** includes main results of the work



**Key words:** aircraft, helicopter, Navier-Stokes equations, incompressible flow, slightly compressible flow, flow development region, boundary layer, variable molecular viscosity, compact vortex flows, pressure distribution, fatigue stresses, surface deformation

## **LIST OF PUBLICATIONS OF THE RECIPIENT BY THE TOPIC OF THE DISSERTATION**

**Publications in which the main scientific results of the dissertation were published:**

1. Lukianov P.V., Song L. Optimal Character and Different Nature of Flows in Laminar Boundary Layers of incompressible Fluid Flow *Problems of Friction and Wear*. 2022. № 4(97). P. 52-60.
2. Lukianov Pavlo, Song Lin. Unsteady Incompressible Laminar Boundary Layer: Time and Space Variable Molecular Viscosity. *Авіаційно-Космічна Техніка і Технологія*. 2023. № 3(187). С. 50—60.
3. Lukianov Pavlo, Song Lin. Compact analogs of the models of vortex flows generated by aircraft flight. *Авіаційно-Космічна Техніка і Технологія*. 2023. № 5(191). С. 4—20.
4. Lukianov Pavlo, Song Lin. Flow development region in the boundary layer: two-component molecular viscosity and partial slip. *Авіаційно-Космічна Техніка і Технологія*. 2023. № 6(192). С. 38—47.
5. Song L., Lukianov P.V., Badakh V.M., Tarasenko T.V. The effect of partial slip on the surface pressure distribution in a slightly compressible flow development region in the boundary layer. *Problems of Friction and Wear*. 2024. №3(104). P. 54-64.

**Publications certifying the approval of the dissertation materials:**

6. Lukianov P.V., Song L. Steady optimal turbulent flow in flat channel: Reynolds-Boussinesq based model analytical solution. *Hydro-aeromechanics in engineering practice: proceedings of XXVI International scientific-technical conference, Kyiv city , 7-10 of September 2021. Kyiv-Kherson, 2021. p. 201-203.*
7. Lukianov P.V., Song L. Steady optimal turbulent flow in circular cross-section pipe: Reynolds-Boussinesq based model analytical solution. *Hydro-aeromechanics in engineering practice: proceedings of XXVI International scientific-technical conference, Kyiv city , 7-10 of September 2021. Kyiv-Kherson, 2021. p. 204-206.*
8. Lukianov P.V., Song L. Numerical search of the solution for steady laminar boundary layer of incompressible fluid flow at cylinder surface. *Computer hydrovechanics: proceedings of Eighth international scientific – practical conference. Institute of hydromechanics of National Academy of Dciences of Ukraine, Kyiv city, 27-28 of September 2022. Kyiv, 2022. p. 53-54.*
9. Lukianov P.V., Song L. Steady incompressible flow in turbulent boundary layer. *Industrial hydraulics and Pneumatics: proceedings of XXIII International scientific-technical conference of ASPGP, Kyiv city, 15-16 December 2022. Kyiv, 2022. p. 41.*
10. Lukianov P.V., Song L. Spatial variability of molecular viscosity in laminar Couette flow: *Industrial hydraulics and Pneumatics: proceedings of XXIII International scientific-technical conference of ASPGP, Kyiv city, 15-16 December 2022. Kyiv, 2022. p. 42-43.*
11. Lukianov P.V., Song L. Laminar incompressible viscous flow due to plane boosting. *Hydro-aeromechanics in engineering practice: proceedings of XXVII International scientific-technical conference, Kyiv city, 31 May-2 June 2023. Kyiv, 2023, p. 15-17.*
12. Lukianov P., Song L. Pressure field distribution in incompressible flow development region of laminar boundary layer. *Computer Hydromechanics: materials of IX Intern. Conf. Kyiv, October 1—2, 2024. Kyiv, 2024. p. 109-110.*

## ЗМІСТ

Анотація.....	2
Anotation.....	11
Вступ .....	21
Розділ 1. Огляд існуючого матеріалу за тематикою	
1.1. Стаціонарний ламінарний примежовий шар нестисливої рідини на тілі.....	27
1.2. Нестаціонарний ламінарний примежовий шар нестисливої рідини на тілі.....	29
1.3. Область розвитку потоку в примежовому шарі: її моделювання та розрахунок.....	34
1.4. Формування компактних вихрових течій під час польоту літака .....	35
Висновки до розділу .....	40
Розділ 2. Теоретичне дослідження нестисливої течії рідини в ламінарному примежовому шарі	
2.1. Оптимальна природа та різні властивості стаціонарної нестисливої течії рідини у примежовому шарі.....	41
2.2. Нестаціонарний нестисливий ламінарний примежовий шар: змінна у часі та просторі молекулярна в'язкість.....	50
2.3. Розширення теорії на складну геометрію.....	65
Висновки до розділу .....	68
Розділ 3. Область розвитку течії в примежовому шарі: двокомпонентна молекулярна в'язкість та часткове ковзання	
3.1. Розширення існуючої моделі в'язкої ламінарної течії рідини в області встановлення в примежовому шарі .....	72
3.2. Застосування варіаційного числення для аналітичного розв'язання задачі про встановлення течії при стаціонарному русі пів-нескінченної площини в рідині, що покоїться.....	77

3.3. Застосування гібридного чисельного методу для опису течії в області її розвитку .....	85
3.4. Нестационарний примежовий шар в області розвитку течії при оптимальному (мінімальний вплив тертя) розгоні півплощини.....	95
3.5 . Вплив часткового ковзання на розподіл поверхневого тиску в області розвитку слабо стисливої течії рідини в примежовому шарі .....	102
Висновки до розділу .....	109
Розділ 4. Розвиток компактних аналогів моделей вихрових течій, що виникають під час польоту літака	
4.1. Два серйозні нерозуміння в моделях вихрових течій .....	114
4.2. Вихрова пелена та її моделювання .....	118
4.3. Супутній вихор: модель Бюргерса-Ротта та її компактний аналог .....	122
4.4. Компактний вихор Бюргерса з ламінарним ядром і турбулентною периферією.....	127
4.5. Моделювання вихрової доріжки фон Кармана на основі моделей компактних вихрових течій.....	132
Висновки до розділу .....	137
Висновки. ....	141
Список використаних джерел .....	143
Додатки .....	154

## Вступ.

Атмосфера та гідросфера є двома невід’ємними складовими Землі. Тож рух тіл у рідині (вода, повітря) має неабияке значення з точки зору проєктування, тобто моделювання та розрахунку, різноманітних транспортних засобів, зокрема авіаційної та ракетно-космічної техніки. Невипадково у провідних світових журналах цього напрямку підрозділ «механіка рідини та газу» (англійською *Fluid mechanics*) посідає перше місце серед інших напрямків досліджень.

При розробці нових моделей літаків та гвинтокрилів основними характеристиками, яким приділяється головна увага, є підйомна сила та сила опору при польоті.

В наш час сучасних комп’ютерних технологій і штучного інтелекту чимало зусиль наукової та інженерної думки спрямовано на розкриття секретів Природи. Чому, наприклад, поверхня крил птахів і тіла риб не є ідеально гладкими? Як відбувається рух повітря поблизу тіл птахів та риб?

Із спрощених моделей, що пояснюють утворення підйомної сили, гарно відомо про перепад тиску між нижньою та верхньою частинами крила. Чомусь мало хто приділяє увагу на основну складову підйомної сили – генерацію крилом вертикальної складової кількості руху, яка спрямована униз. За законом збереження кількості руху (точно як при польоті ракети), літаки та гвинтокрили, а також птахі, -- усі крилаті, -- отримують відповідний імпульс, що має вертикальну складову, напрямлену угору. Сказане щойно стосується основної, у відсотковому сенсі, складової підйомної сили. В той же час гарно відомо, що різниця швидкостей під крилом і над ним обумовлює додатковий перепад тиску. Це явище намагаються описувати так званою циркуляцією навколо крила.

Однією із новаторських думок, звичайно яка належить науковому керівникові цієї роботи, була ідея про використання на поверхні крила так званої легко-проникної шорсткості (ЛПШ), або англійською мовою – сапору.

Річ у тім, що наявність легко-проникної шорсткості призводить до значного зменшення величини швидкості рідини у шарі із ЛПШ. Використовуючи наявну

експериментальну базу, були підготовлені та проведені кілька експериментів, як із рідиною (водою), так і повітрям. Але результати виявилися небажаними: наявність ЛПШ аж ніяк кількісно не вплинуло на зміну підйомної сили.

З метою поновлення досліджень, була здійснена спроба теоретичного моделювання турбулентної течії в ЛПШ. Цьому сприяла наявність кількох робіт наукового керівника. Це, перш за все, вдала модель ламінарної нестисливої течії рідини у шарі ЛПШ [17]. До цього в дослідженнях інших вчених [5] течії в ЛПШ моделювались без жодного фізичного пояснення. Утім, в роботі [17] вперше було застосовано по суті варіаційний принцип Мопертьюї, згідно із яким, оминаючи перешкоди (ЛПШ), рідина тече таким чином (поле повздовжньої швидкості) аби якомога швидше подолати ці перешкоди. Простіше кажучи, витрата рідини у кожному вертикальному (чи нормальному до поверхні тіла) перерізі є максимальною. Додали впевненості ще й роботи [18-19], де методи варіаційного числення знову принесли обнадійливі результати. Отже, теоретичні дослідження у цьому напрямку розпочалися.

На початку теоретичних досліджень навіть і не йшлося про ламінарний тип течії рідини, бо було тверде переконання у тому, що у цій області науки вже все гарно вивчене – відоме. Тому у початкових публікаціях, а це суто матеріали конференцій [18-20], отримані результати представлялися як такі, що відповідають турбулентній течії рідини у примежовому шарі. Важливим, або, як то кажуть поворотним, моментом досліджень стало рецензування статті у першому за світовим рейтингом журналі у цієї галузі – *Journal of Fluid Mechanics*. Шарль Маніву, дійсний член чотирьох Академій наук, не погодився із тим, що представлені результати (поле швидкості) описують турбулентний примежовий шар. Але в рецензії Шарля Маніву зазначалося, що представлені криві дуже нагадують саме розподіл швидкості при малих числах Рейнольдса, або просто кажучи, відповідають ламінарній течії.

Розпочався критичний аналіз не тільки всіх сучасних, але й найперших досліджень, починаючи із робіт самого фундатора сучасної теорії в'язкої течії

рідини – Джоржа Стокса [107]. Порівнюючи нашу модель «турбулентного руху» із загально- відомою моделлю Стокса, ми дійшли до висновку, що у примежовому шарі молекулярна в'язкість може бути функцією відстані до твердої поверхні (тіла, що рухається). Отже, виходячи із сказаного вище, **об'єктом дослідження даної роботи** стала нестислива та слабко стислива течія рідини у примежовому шарі. При цьому основну увагу приділено саме без-градієнтному примежовому шарові, що утворюється при русі тіла (політ) у нерухомій нестисливій та слабко стисливій рідині, яким вважається повітря при русі тіла зі швидкістю меншою за приблизно 70м/с—200 м/с. Для великих літаків це відповідає приблизним межам злітно-посадкової швидкості аж до крейсерської швидкості.

Розглядаючи процеси обтікання літака та гвинтокрила при їхньому польоті, не можна обходити стороною таке явище як вихроутворення. Отже його теж слід віднести до **об'єкту досліджень** даної роботи.

**Предметом досліджень даної роботи** є розробка математичних моделей, що описують рух нестисливої та слабко стисливої течії рідини у примежовому шарі, а також утворення вихрових течій під час польоту літака

**Основною метою досліджень** даної роботи було розробити нові моделі нестисливої та слабко нестисливої течії рідини в примежовому шарі, а також вихроутворення при русі тіла в нерухомій рідині.

Для досягнення цієї мети були поставлені такі завдання:

- Здійснити узагальнений критичний аналіз літературних джерел у зазначеній в меті області;
- Розробити модель нестисливої ламінарної течії рідини у примежовому шарі на нескінченій площині, що рухається зі сталою швидкістю;
- Розробити фізично-коректну модель нестационарного примежового шару, що відповідає оптимальній нестисливій та слабко стисливій течії рідини;
- Перейти від нескінченної геометрії до пів-нескінченної і розробити модель області розвитку нестисливої течії рідини;

- На підставі наявного досвіду наукового керівника в області вихрової динаміки, розробити нові та запропонувати раніше отримані компактні аналоги моделей вихрових течій, що утворюються під час руху літака;
- Узагальнити отримані моделі на випадок обтікання тіла зі складною геометрією (криволінійною поверхнею).

**Методи досліджень.** В роботі головним чином використовуються аналітичні методи: варіаційне числення, методи розв'язання диференціальних рівнянь, а також, звичайно фундаментальні закони фізики. До таких законів можна віднести закони збереження енергії та кількості руху, закони Н'ютона. Крім того, при здійсненні спроби чисельного розв'язання задачі про область розвитку течії, було вперше використано гібридний чисельно-аналітичний метод. Уздовж області розвитку течії застосовувався спектральний метод, а поперек – чисельний метод Рунге-Кутти 4-го порядку точності. Кожний із цих методів окремо є гарно відомим і широко використовуються в наукових дослідженнях.

**Достовірність отриманих результатів** підтверджується застосуванням апробованих методик та методів дослідження. Результати тестових задач порівнюються із відомими результатами фізичних експериментів.

### **Наукова новизна отриманих результатів**

*вперше*

фізично обґрунтовано залежність молекулярної в'язкості від відстані до стінки у ламінарному примежовому шарі нестисливої течії рідини;

обґрунтовано відмінність нестисливих течій у без-градієнтному та градієнтному примежових шарах, яка пояснюється різною кількістю сил, що діють на рідину;

виявлено, що існуючі теорії опису руху рідини дають хибні висновки, зокрема висновок про можливість існування так званого «вічного двигуна», натомість запропонована модель дає можливість отримати фізично коректні результати.

*удосконалено*



концептуальну схему щодо використання умови повного прилипання рідини до поверхні рухомого тіла замінено на умову часткового прилипання у області розвитку течії;

на підставі комплексного підходу, який базується на виявленні суттєвих нерозумінь у механіці рідини та газу, удосконалені кілька моделей, що описують вихрові течії, які генеруються на плоскій та криволінійній поверхнях під час польоту літака, зокрема: 1) модель вихрової пелени, що утворюється на прямолінійній поверхні; 2) модель вихрової доріжки Кармана, що утворюється за об'ємним тілом (із криволінійною геометрією поверхні); 3) модель так званого вихору Бюргерса - Ротта.

*отримали подальший розвиток:*

теорія ламінарної течії в примежовому шарі, зокрема вказано на причину невідповідності сталості молекулярної в'язкості в примежовому шарі – відсутність ізотропії простору;

реологія примежового ламінарного шару: завдяки відходу від припущення сталості молекулярної в'язкості в примежовому шарі і узагальнення можливості залежності в'язкості від відстані до твердої поверхні та часу (в нестационарних задачах) стало можливим пряме застосування рівнянь Нав'є-Стокса для опису ламінарної нестисливої течії в примежовому шарі;

методологія проведення експериментальних досліджень, яка базується на відсутності повної оберненості задачі руху тіла в нерухомій рідині та задачі обтікання нерухомого тіла градієнтною течією рідини.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційна робота пов'язана з планами науково-дослідної роботи та навчальної роботи і відповідає тематичній спрямованості наукових розробок, що здійснювалися у КАІ та, зокрема кафедри Гідро газових систем, а саме в рамках науково-дослідних робіт: у 2023-2024 роках “Дослідження фізичних процесів в гідравлічних і пневматичних пристроях та елементах конструкцій рідинно-

газових систем літальних апаратів” (Державний реєстраційний номер 0122U201453).

### **Практичне значення.**

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що вироблене розуміння сутності відмінності течії в примежовому шарі в прямій задачі (руху тіла в нерухомій рідині) та оберненій задачі (обтікання рідиною нерухомого тіла). Течія в примежовому шарі описується не спеціальним рівнянням, а прямим застосуванням рівнянь механіки рідини та газу (рівняння Нав'є-Стокса). Таке стало можливим завдяки відходу від припущень сталості молекулярної в'язкості та миттєвого прилипання частинок рідини до поверхні рухомого тіла. Ще одним практичним значенням є те, що повної оберненості польоту літака та обтікання нерухомої моделі в аеродинамічній трубі немає. Отже, рекомендується проводити виміри в лабораторних умовах саме на рухомих моделях літаків (крил), що максимально наближує експеримент до реального польоту.

Результати дисертації можуть бути використані в авіа будівництві при проектуванні літаків та вертольотів, де процеси обтікання поверхні і утворення примежового шару є основною складовою аеродинамічних характеристик літального апарату.

### **Особистий внесок здобувача визначається такими положеннями.**

Основні результати, ідеї досліджень, концепція роботи, принципи розв'язання задач.

**Апробація результатів досліджень.** Найважливіші ідеї, висновки, рекомендації, отримані в дисертації, оприлюднені на наукових та науково-практичних конференціях, у тому числі міжнародних, всеукраїнських із міжнародною участю: “Гідроаеромеханіка в інженерній практиці” (Київ, 2021), “Комп'ютерна гідромеханіка” (Київ, 2022), “Промислова гідравліка і пневматика” (м. Київ, 2022), “Гідроаеромеханіка в інженерній практиці” (Київ, 2023), “Computer Hydromechanics” (Kyiv, 2024).

**Наукові статті за темою дисертації.** Основні результати дисертації представлено у 3 наукових статтях (разом із науковим керівником), опублікованих у журналах, що входять до переліку фахових видань зі спеціальності 134, категорія «Б», у двох фахових журналах спеціальності 131, категорія «Б», 7 тезах подовідей на науково-технічних конференціях.

**Структура роботи.** Робота складається із анотацій українською та англійською мовою, вступу, чотирьох розділів, одного додатку та списку використаних джерел із 112 джерел на 11 сторінках. Основну частину роботи викладено на 123 стор., 15 рис.

## Розділ 1. ОГЛЯД ІСНУЮЧОГО МАТЕРІАЛУ ЗА ТЕМАТИКОЮ.

### **1.1. Стаціонарний ламінарний примежовий шар нестисливої рідини на тілі.**

Коли тіло рухається в рідині, взаємодіють дві фази, що спричиняє утворення ламінарного або турбулентного примежового шару — області рідини, що прилягає до тіла, що рухається. В авіації та космонавтиці характеристики примежового шару відіграють важливу роль, оскільки вони визначають силу лобового опору в польоті та частково відповідають за підйомну силу. При дослідженні турбулентного примежового шару виявилось, що досі не вирішена не тільки проблема замикання турбулентності, але і відсутня чітка теорія ламінарного примежового шару, яка б безпосередньо базувалася на рівняннях Нав'є-Стокса [107]. Тому перший розділ цієї роботи присвячено саме розробці єдиного підходу до опису ламінарного примежового шару нестисливої течії. Перед коротким оглядом існуючих теорій зазначимо, що в сучасних чисельних дослідженнях течії не поділяються на ламінарні та турбулентні, а ламінарні течії відносять до числа низько-рейнольдсєвих. Якщо для опису турбулентної течії апіорі вважають вихрову в'язкість змінною у просторі, то за аналогією із прямим чисельним моделюванням (DNS), припускаємо, що молекулярна в'язкість також може бути змінною. Це фізичне припущення, засноване на відсутності просторової ізотропії в примежовому шарі. Для інтересу до цієї роботи, наведемо відомий факт: ламінарні примежові шари на диску, що обертається, і при обтіканні рідиною, що обертається, нерухомого диска абсолютно різні. По-перше, вони описуються різними автомодельними розв'язками, по-друге, товщина примежових шарів відрізняється приблизно в два рази [98] (відразу після формули 11.8). Тепер легко зрозуміти, що задача про рух тіла в рідині, що покоїться на нескінченності, і задача про обтікання нерухомого тіла рідиною також мають різну природу і необоротні. У першому випадку, коли потік рідини повністю обумовлений і визначається зсувом подовжньої швидкості (внутрішнім тертям), утворюється без-градієнтний примежовий шар.

У другому випадку рідина обтікає нерухоме тіло і діють дві сили: сила поздовжнього градієнта тиску і сила в'язких напружень зсуву.

*Стан вивчення задачі.* Стокс [107] розглядав задачу про вимушений рух рідини під дією гармонійних коливань площини. Отримано експоненціальну залежність зменшення швидкості від відстані від коливальної площини. Стокс, щоб переконати всіх у своїй правоті, посилається на досліди, де ця залежність підтверджена. Ця задача представлена у якості першої в [107]. Виникає цілком резонне запитання: чому Стокс не вважав першою і найпростішою задачею сталий рух площини, яка, за Стоксом, має лінійний розв'язок відносно швидкості рідини. Відповідь полягає в тому, що, як відомо [48], ламінарний примежовий шар має нелінійний розподіл швидкості. Експоненціальна залежність як гарне наближення для в'язких і проміжних підшарів турбулентного примежового шару згадується в роботі Ван Дріста [50]. Помилкою Ван Дріста, втім, як і всіх, була віра в оборотність течій (задач), про неможливість якої вже йшлося вище. Зі сказаного вище можна зробити один висновок: у без-градієнтному примежовому шарі, викликаному чистим зсувом, відбувається експоненціальне зменшення швидкості з відстанню від рухомої стінки. Тоді як щодо відомих теорій примежового шару Прандтля [90], Блазіуса [39], Кармана [61], Польхаузена [88], а також менш відомих теорій Сохраба [101], Вейберна [111], [112] Абдул-Гафур [32]? Як буде показано далі, усі теорії узгоджуються. Відповідь полягає в різній структурі ламінарного без-градієнтного та градієнтного примежових шарів. На всі існуючі теорії вплинула помилкова думка про оборотність течій - градієнтних і без-градієнтних. Далі, використовуючи варіаційне числення, показано, що в умовах експерименту, коли створюється градієнтний зсувний потік, молекулярна в'язкість може мати стале значення. І це не гіпотеза, а результат, отриманий з аналітичного розв'язку для поля швидкості. Чого, сталість в'язкості, не можна сказати про чисто зсувну течію в без-градієнтному примежовому шарі. Там, усередині примежового шару, в'язкість зростає від

мінімального значення на рухомій площині до максимального значення на зовнішній, навіть якщо розмитій, межі ламінарного примежового шару.

## **1.2. Нестационарний ламінарний примежовий шар нестисливої рідини на тілі.**

Незалежно від того, встановлений чи невстановлений є рух тіла в рідині, на нього завжди діє сила тертя. Це, звичайно, стосується і руху літаків. Сила тертя рідини на поверхні літака створюється в досить тонкому примежовому шарі - в безпосередній близькості від обтічної поверхні [27]. Примежовий шар є важливою складовою оптимізації аеродинамічних характеристик профілю крила [9], поліпшення обтікання лопаті і збільшення її несучих властивостей [29]. Течія в примежовому шарі має також відношення до формування вихрових слідів, що конче важливе для безпеки польотів, особливо при нестационарних режимах – при зльоті та посадці [28].

У середині XIX століття однією з нових на той час проблем стало вивчення впливу опору середовища на рух маятника. Вчені не полишали ідею створення так званого «вічного двигуна». Ідеї, як відомо, не виникають з нічого. Вони (ці ідеї) є результатом певних теорій. Однією з таких теорій є модель Стокса руху в'язкої рідини [107]. Відповідно до цієї моделі при нестационарній течії за умови припущення сталої молекулярної в'язкості виходить хибний висновок про можливість існування вічного двигуна. Щоб вказати на недоліки теорії Стокса, у даній роботі розглядаються дві задачі: основна задача стосується розгону та наступного сталого руху, а друга, допоміжна задача, стосується нестационарної течії рідини уздовж нерухомої площини.

Незважаючи на те, що сьогодні практично всі зусилля дослідників спрямовані на вивчення турбулентних течій, тим не менш, теорія нестационарного ламінарного примежового шару ще не завершена. Це стає зрозумілим після вивчення робіт Стокса [107-108]. Лише нещодавно вдалося з

єдиних підходів отримати аналітичний опис стаціонарних градієнтних і безградієнтних нестисливих течій у примежовому шарі [73].

Що стосується нестационарного примежового шару, то розглядалися різні задачі. Перш за все, слід згадати загальний розв'язок для довільного закону прискорення площини до скінченної швидкості, отриманий Стоксом (див. [108], (185)) та його окремий випадок для миттєвого приведення площини в рух із сталою швидкістю (див. [108], (186)). Мабуть, усвідомлюючи фізичну неможливість миттєвого розгону площини, як і будь-якого іншого тіла скінченної маси, до скінченної швидкості, Релей розглянув випадок рівноприскореного приведення нескінченної площини із стану спокою в рух із сталою швидкістю [93]. Отриманий на основі сталості в'язкості (рівняння Нав'є - Стокса) розв'язок Стокса і його окремий випадок, розглянутий Релеєм (див. [93], формули (17)-(18)), вказують на розбіжність з фізикою. Так, у роботі Релея [93] вказується (див. останню формулу третього параграфа цитованої роботи), що градієнт швидкості, а разом з ним, з урахуванням сталості молекулярної в'язкості, і напруження зсуву  $\tau$ , асимптотично спадають у часі за законом

$$\mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \tau (t \gg t_b) t^{-1/2} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

В (1.1)  $t_b$  є час розгону,  $V_x$  -- швидкість площини,  $\mu$  -- молекулярна в'язкість,  $t, y$  -- час і нормальна до площини координата відповідно.

З (1.1) відразу випливає, що при рівномірному русі опір руху дорівнює нулю. Іншими словами, ми розганяємо тіло, і воно далі рухається, без підведення енергії ззовні, з постійною швидкістю. Звичайно, це абсолютно неправильно, як і спроба створити вічний двигун.

Наступні міркування допоможуть нам, по-перше, переконатися, що в задачі про рух площини в просторі швидкість ніде не може бути сталою або зростати, а, по-друге, вони вкажуть на нефізичну відповідність (1.1). Зрозуміло, що при русі площини добуток швидкості і в'язкого напруження зсуву на

поверхні цієї площини є не що інше, як потужність, яку площина передає навколишньому простору. Якщо рух рівномірний, то згадана потужність повинна щомиті кудись зникати. Так воно і є: зникає за рахунок в'язкої дисипації (нагрівання рідини не враховується):

$$\begin{aligned} (V_x \cdot \tau)(y=0) &= - \int_0^{\infty} \mu \frac{dV_x}{dy} \frac{dV_x}{dy} dy = \\ &= -\tau(0) \int_0^{\infty} \frac{dV_x}{dy} dy = -\tau(0)(V_x(y=\infty) - V_x(y=0)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

При виведенні (1.2) було враховано, що

$$\mu(dV_x/dy) = \tau(y=0) = \text{Const},$$

що відповідає без-градієнтній течії. Отже, баланс цих потужностей можливий за умови, що  $V_x(y=\infty)=0$ . Це важливий факт, оскільки він не дозволяє полю швидкостей мати сталі значення на нескінченності та всюди. З іншого боку, напруження зсуву стає в часі (а в разі прискорення тіла асимптотично прямує до сталого значення). Отже, вираз (1.1), будучи абсолютно правильним математично, не має нічого спільного з реальною фізикою задачі, оскільки розсіювання енергії відбувається в кожен момент часу.

Ці протиріччя зникають, коли в узагальнених рівняннях Нав'є-Стокса в'язкість у примежовому шарі розглядається, у загальному випадку, як змінна: при русі в'язкість є функцією відстані до межі твердого тіла (стілки) (див. [73]), а для нестационарного руху є функцією часу та відстані (див. нижче).

Розвиток цієї теми можна знайти в наступних роботах Гьолтлера [54], Ховарса [60], Соуерсбі [104,105] і Уотсона [110], в яких розглядаються питання росту примежового шару, а також примежовий шар в напівнескінченній області різної форми. Течії в стоксовому примежовому шарі у вигляді гармонійних коливань використовуються й зараз при розгляді різноманітних нестационарних задач [86].



Для кращого розуміння подальшого викладу зупинимося коротко на огляді статті [73], присвяченій стаціонарному примезовому шару. Відправною точкою дослідження є монографія Шліхтінга [98], де читач може знайти короткий виклад проблеми (на момент виходу цієї книги). Важлива роль відводиться експериментальним роботам з вимірювання примезового шару [48]. Теорія примезового шару, яка зараз використовується, була розроблена Прандтлем [91] майже через шістьдесят років після публікації роботи Стокса [107]. Хіба це не парадокс? Теорія Стокса [107] руху в'язкої рідини вже існує, але саме її призначення, пов'язане насамперед з описом внутрішнього тертя в примезовому шарі, знаходить свою реалізацію лише в роботі Прандтля [91]. Відповідь на це питання можна знайти в [73]. Теорія стаціонарного примезового шару нестисливої течії отримала подальший розвиток у роботах Блазіуса [39] (а також узагальнення його задачі [33]) і Больцце [40], а також у роботах Кармана [61] та Польгаузена [88]. Дещо відокремлена в часі робота Ван Дріста [50], хоча формально присвячена турбулентному примезовому шару, але де використовується експоненціальний множник, характерний саме для ламінарного примезового шару [108]. Про успіхи у вивченні примезового шару до 1970 р. йдеться в оглядовій роботі Лойцяньського [71]. Сучасні роботи з ламінарного примезового шару включають формально математичні роботи Віберна [112–112], роботу Сохраба [101], засновану на статистичному описі фізики течії як у ламінарному, так і в турбулентному примезовому шарах. І, мабуть, заслуговує на увагу також робота Абдули Графора [32], в якій розвинені ідеї методу Польгаузена [88].

### **1.3. Область розвитку течії в примезовому шарі: її моделювання та розрахунок.**

При обтіканні тіла при його русі в рідині, незалежно від того, стислива чи нестислива ця рідина, при контакті твердої поверхні із рідиною остання неспроможна миттєво набутися скінчену швидкість. Це стосується обтікання передньої частини фюзеляжу літака, його крил, лопатей гвинтокрила, інших

частин тіл, що рухаються у нерухомій рідині. Отже, швидкість встигає генеруватися лише в тонкому примежовому шарі, правильний розрахунок якого вкрай важливий для обрахунку сили тертя [27]. На підставі знань про структуру примежового шару на крилі визначається оптимальний профіль крила [9].

Понад 200 років тому, у 1822 році, Нав'є вивів рівняння, які описують деформацію твердого тіла та рух нестисливої рідини. Але загальне визнання отримали ці рівняння після опублікування трохи пізніше, в 1845 році, теорії Стокса. [107]. Стокс ґрунтувався також на математичній аналогії між рівняннями, що описують рух в'язкої рідини та процеси передачі тепла – теорією Фур'є. Однак Стокс не врахував одне важливе припущення теорії Фур'є: другий закон Фур'є, де коефіцієнт теплопровідності вважається сталою величиною, не має місця (не дійсний) в області поблизу межі розділу різних середовищ (подробіці див. в [73]). І це тому, що саме в примежовому шарі поведінка однієї фази взаємопов'язана з поведінкою іншої. У разі течії, що розглядається, поведінка рідини в примежовому шарі визначається наявністю твердої поверхні тіла, що рухається. А це, у свою чергу, не відповідає однорідності та просторовій анізотропії, які гарантують, згідно з Фур'є, сталість коефіцієнта теплопровідності. Отже, шляхом нескладної логіки, отримано важливий висновок: для нестисливої ламінарної течії рідини в примежовому шарі потрібно відійти від поняття сталості молекулярної в'язкості і мати на увазі, що в'язкість, взагалі кажучи, може бути функцією від просторових координат.

Повернемося тепер до нашої задачі. Якщо спробувати пролити світло і зрозуміти, що вже відомо про область розвитку течії, то перше здивування буде дуже кумедним: ще й досі цю задачу розв'язують не прямо, а як асимптотичний перехід нестационарної течії до стаціонарної при дуже великих значеннях часу. Це факт заінтригував нас і нами була здійснена спроба прямого розв'язання вказаної задачі відомими аналітичними методами. Тим паче, що наявність оберненого зв'язку в системі рідина – рухоме тіло дає всі підстави до застосування відповідного математичного апарату, яким є варіаційне числення.

Спільне застосування методів варіаційного числення та інформації про специфіку руху нестисливої рідини в примежовому шарі привело до чіткого усвідомлення того, що в області розвитку течії гранична умова повного прилипання не має місця. Цей факт спонукав нас до вивчення наявної інформації в сучасних джерелах про умову ковзання рідини повз поверхню твердого тіла. Коротко зупинимось на джерелах, на яких зосередилась наша увага.

Перш за все, слід зазначити, що питання ковзання рідини о поверхню твердого тіла порушив, вже за рік після опублікування своїх рівнянь, сам Нав'є [84]. Отже Нав'є не відкидав можливості невиконання умови прилипання, яку Стокс фактично постулював -- без жодних фізичних (законних) підстав.

В статті [68] зазначається про те, що на гладких водо-відштовхуючих поверхнях експериментально спостерігались нано-бульбашки (повітря). Крім того, тріщини (малих масштабів) можуть слугувати місцями накопичення бульбашок у разі використання рідин, що частково змочують поверхню. Ці бульбашки можуть забезпечувати граничну умову нульового зсувного напруження і значно зменшувати тертя, що генерується твердою межею.

Заслуговує також на увагу робота [92], де також розглядаються граничні умови (ефективного) ковзання методом імітації (моделювання) молекулярної динаміки. Цікавим є той факт, що локальні граничні умови, як на змочених, так і на незмочених областях, характеризуються скінченими довжинами масштабу ковзання Нав'є. Але для нашої роботи головним є факт наявності рідини вздовж твердої поверхні. Вивченню часткового ковзання (partial slip) присвячено роботу [56]. Ця робота, зі слів самих же авторів, була мотивована порушенням умови прилипання течії рідини в області масштабів порядку міліметр. Здавалось, в'язкість і умова прилипання повинні відігравати значну роль в балансі сил. Але це не зовсім так. Серед важливих висновків роботи, що цитується, слід зазначити залежність дифузії від локальних умов стінки, що корелює із результатами [73,84] про просторову залежність молекулярної дифузії.

Наявність ковзання рідини повз тверду поверхню вивчається в роботі [65] з позиції розв'язків функції течії для деяких граничних умов контактної лінії. Іншими словами, взаємодія рідини із твердим тілом ототожнюється із деякою контактною лінією. А от умови на межі, що розглянуті в [67], такі: ковзання Нав'є, супер-ковзання та узагальнена гранична умова Нав'є. Отже, не вдаючись у подробиці цитованої роботи, можна, однак, вже впевнено стверджувати про наявність ковзання.

У намаганні зменшити тертя, науковці і інженери вдаються до різних засобів. Одним із них є застосування складок (corrugation) (канавок) і накопичення, як вже зрозуміло із попередньо цитованих робіт, там бульбашок або рідини, що і призводить до часткового, або як його ще називають, ефективного ковзання. Дослідження в цієї області представлені в роботі [44].

Завершимо короткий огляд робіт статтею [47]. Ця робота присвячена руху контактної лінії між двома рідинами, що не зміщуються. Але головне, що в ній зазначено, це те, що рівняння Стокса не дозволяють описувати зазначену течію, коли на двох різних межах контактної лінії мають місце дві різні величини швидкості.

Отже, наведений короткий огляд сучасних робіт впевнено стверджує про можливе порушення умови прилипання до твердого тіла в'язкої течії рідини. Ми ж лише підтвердимо це і покажемо далі, що також існують течії, в рамках Н'ютонівської моделі рідини, де умова повного прилипання просто не може виконуватись і, таким чином, повинна також бути замінена на умову часткового ковзання.

#### **1.4. Формування компактних вихрових течій під час польоту літака.**

З усіх фізичних фундаментальних законів збереження у механіці особливе місце займає закон збереження кількості руху. Незалежно від характеру взаємодії (пружне або непружне зіткнення), для загальної кількості руху (імпульсу) системи (як дискретної так і розподіленої) тіл, що взаємодіють, - цей

закон завжди справедливий. У зв'язку зі щойно сказаним, не випадково інерційна складова руху є основною при створенні підйомної сили. Відштовхуючи від себе вниз повітря, птахи та комахи здатні, завдяки закону збереження кількості руху, зависати на місці в повітрі. Літак, як відомо, не здатний махати своїми крилами. Йому для створення підйомної сили необхідно мати складову швидкості прямолінійного руху. Будучи нахиленим під якимось кутом (атаки) по відношенню до руху літака, крило, подібно до птахів і комах, відштовхує зустрічний потік повітря від себе вниз і, таким чином, створює головну (інерційну) складову підйомної сили [31].

При русі тіла у рідині у безпосередній близькості до його поверхні утворюється примежовий шар – область течії, у якій швидкість змінюється від максимальної, рівної швидкості руху тіла у цій точці простору, до практично нульового значення, в 100-1000 разів меншого за максимальне. У ранній період свого розвитку, коли теорія в'язкої рідини ще не була розроблена або не прийнята, в гідромеханіці примежовий шар трактувався як приєднана до тіла маса [66]. Так, щоб наблизитися до реального опису явища, пропонувалося розглядати, на підставі моделі нев'язкої течії рідини, рух тіла разом з деяким об'ємом рідини навколо нього. Досить очевидно, що такий підхід до опису руху літака не підходить – у кожний наступний момент часу літак, при своєму русі, взаємодіє з новими і новими повітряними масами.

Як відомо, політ та взаємодія при цьому крила з повітрям викликає генерацію вихрових рухів. Зокрема, це стосується відриву вихору від поверхні крил та інших частин літака [70], а також формування вихрової течії в сліду позаду літака [100]. Одну із перших систематизацій фізики утворення вихорів було зроблено в [102]. Дослідженню вихрової пелени присвячені роботи [57,87]. Для всебічного розуміння моделей вихрових течій слід звернутися до монографії [97]. Природа створення будь-якої вихрової течії – наявність зсуву швидкості. Цей висновок безпосередньо випливає із загальної формули (визначення) завихрення як математичного оператора ротора вектору швидкості: відсутність

градієнтів (зсуву) швидкості за просторовими координатами нездатна створити вихор. Але й це ще не все: навіть потенційна течія по кругових орбітах (точковий вихор) є в'язким рухом, а ті, інші вихрові течії, що вважаються нев'язкими через явну відсутність в'язкості у розв'язку – не що інше, як в'язкий стаціонарний рух, у якого сили в'язких дотичних напружень балансують самі себе [35].

У своєму виступі перед Королівською спільнотою Великобританії з приводу нагородження його золотою медаллю Людвіг Прандтль докладно описав [91] усі відомі йому на той час знання про вихрову природу тіла, яке обтікає потік рідини, що набігає на нього (зворотна задача) [39]. Згідно із Прандтлем, завихрення генерується не де-небудь, а в примежовому шарі, природа якого – наявність в'язкості зсувної течії. В своїй доповіді Прандтль представив методи боротьби з відривом вихорів в примежовому шарі, які використовуються в сучасних дослідженнях [30]. Однак, як і всі інші, Прандтль помилково вважав оборотність прямої та оберненої задач – руху тіла в рідині та обтікання нерухомого тіла рідиною. Це, як стало нещодавно відомо [73,74], невірно. У зсувних течіях, на межі розділу двох середовищ, може виявлятися нестійкість Кельвіна-Гельмгольца. Однією з ранніх робіт є стаття Мейрона та ін. [80], що присвячена аналітичній структурі вихрової пелени. Дослідженню утворень особливостей (сингулярностей) на ранній стадії зародження вихрової пелени приділено увагу в роботі [34]. Тестуванню, моделюванню нестійкості Кельвіна-Гельмгольца присвячені відповідно роботи [62], [99], а вивченню нелінійних властивостей цієї нестійкості -- [89,62].

Дослідження стійкості нестаціонарної течії Кельвіна-Гельмгольца можна знайти в роботі [82]. В вихровій динаміці існує таке поняття як самоорганізація – утворення із хаотичного руху певних вихрових структур, які називають когерентними або такими, що довго живуть. З цієї точки зору розглядається двовимірна нестійкість Кельвіна-Гельмгольца в [85]. Для можливості керування примежовим шаром та нестійкістю Кельвіна-Гельмгольца можна використати різного роду початкові умови. Саме впливу початкових умов на подальший

розвиток нестійкості Кельвіна-Гельмгольца присвячена робота [21]. Ця нестійкість призводить до утворення вихровий пелени, яка здійснює істотний внесок у формування підйомної сили крила [102].

Незважаючи на вказану природу формування завихрення завдяки наявності в'язкості, широке застосування для розрахунку підйомної сили (і опору) отримали методи, засновані на використанні рівнянь Ейлера, тобто такі, в яких в'язкість не враховується. Одним із них є так званий *Метод дискретних вихорів*, який викладено в монографіях [1,6] та статті [44]. Подальший розвиток цього методу та його застосування для прикладних задач міститься в [45,26]. Цей метод ігнорує наявність примежового шару рідини на поверхні тіла і вважає, що тіло обтікає рідина, величина та напрямок швидкості в якій моделюється парою протилежно напрямлених вихорів – диполем (див. також роботу [55]). Щоб врахувати структуру примежового шару, слід апріорі розглядати (моделювати) в'язку вихрової течії. На щастя, за попередні 10-15 років з'явилося чітке усвідомлення недоліків існуючих моделей вихрових течій і, як результат, більш точний їх опис. Відправною точкою стало небажання миритися із тим, що природні вихорі, мають компакту структуру а їм натомість ставлять у відповідність моделі течій, де обертається весь простір – аж до нескінченості. Так з'явилася перша робота [12]. Але модель точкового вихору, на базі якої створено зазначений вище метод дискретних вихорів, ще панувала як неперевершена. Але на її місце прийшов компактний аналог – модель квазіточкового вихору [13], основною перевагою якої є можливість задавати будь-який скінчений розмір вихору, який є близьким до класичного – точкового.

Оскільки переважна більшість течій рідини є турбулентною, то модель квазіточкового (ламінарного) вихору була узагальнена на випадок турбулентної течії – за певних обмежень [3,14]. Трохи згодом, стало зрозумілим, як на базі однієї моделі можна отримати, шляхом граничних переходів, всі існуючі основні моделі – точкового вихору, квазіточкового вихору та вихору Ренкіна. Тому цю модель було названо універсальною моделлю компактного вихору [16].

Теоретичне обґрунтування, на підставі класичних теорем, можливості існування компактних вихрових течій стало трохи пізніше – після численних обговорень та виступів на семінарах провідних інститутів Національної Академії наук України [20].

Нарешті, оскільки питання інерційної стійкості в вихровому русі є вкрай важливим, бо вказує чи є течія ламінарною чи турбулентною, то було проведено дослідження, результати якого містяться в [15].

Усвідомлення необхідності врахування змінності в'язкості в примежовому шарі [73,74] дозволило по-новому поглянути на рух, що аналізується: оскільки вихрова пелена формується в примежовому шарі, то в моделі вихору в'язкість має повне право бути змінною величиною - всередині примежового шару, зрозуміло. Зазначені щойно ідеї слугували генератором даної роботи. Пізніше, при всебічному вивченні проблеми вихроутворення при русі тіла в рідині, і літака зокрема [100], стало зрозуміло, що однією вихровою пеленою не обмежитися – потрібно також приділити увагу і вільним вихровим течіям, таким як вихор Бюргерса-Ротта [42,96] та вихрова доріжка фон Кармана.

Надалі виклад будується наступним чином: формулюється проблематика і цілі даної роботи, з'ясовуються загальні помилки в теорії вихрових рухів, зокрема ототожнення в'язких когерентних (тих, що довго існують) вихорів з нев'язкими і моделювання компактних вільних вихрових течій за допомогою розподілів швидкості, кінетична енергія в яких дорівнює нескінченності, що, очевидно, неможливо через закон збереження енергії. Далі розглядаються моделі вихрової пелени, під'єданого вільного вихору, а також вихрової доріжки Кармана. Не можна не відзначити, що поняття математичної моделі також розширюється [2]: залишаючись у класі неперервних функцій для поля швидкості, що важливо для неперервності поля тиску, можна, зберігаючи загальність, використовувати шматково-неперервні розподіли для поля завихрення. При цьому рівняння, що описує рух, залишається справедливим (виконується) у всіх точках області вихрової течії.



## **Висновки до розділу**

У даому розділі представлено змістовний огляд існуючого матеріалу щодо досягнень згідно із тематикою дисертації . Зокрема вказано на важливість використання принципово нового підходу щодо опису ламінарного примежового шару нестисливої і соабко стисливої течії рідини. Це є результатом неспроможності теорії Стокса, що припускає сталість молекулярної в'язкості, фізично коректно описати основні задачі теорії внутрішнього тертя всередені примежового шару: стаціонарний рух площини, розгон площини, область розвитку стаціонарної та нестаціонарної течії. Крім того, у розділі йдеться про більш фізично коректний опис вихрових течій, що утворюються під час руху літака.

## Розділ 2. ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТИСЛИВОЇ ТЕЧІЇ РІДИНИ В ЛАМІНАРНОМУ ПРИМЕЖОВОМУ ШАРІ

### 2.1. Оптимальна природа та різні властивості стаціонарної нестисливої течії рідини у примежовому шарі.

*Постановка проблеми.* Розглянути оптимальний характер і різну природу нестисливої течії рідини в ламінарних примежових шарах:

-- без-градієнтному примежовому шарі, що утворюється при сталому русі нескінченної площини;

-- градієнтному примежовому шарі при обтіканні нерухомої площини.

Метою даного розділу є отримання аналітичних залежностей для розподілу поля швидкостей у градієнтних і без-градієнтних ламінарних примежових шарах нестисливої течії рідини, а також виявлення їх спільних та відмінних властивостей.

#### **Без-градієнтний ламінарний примежовий шар, спричинений рухом нескінченної площини зі сталою швидкістю.**

Для розуміння та порівняння результатів, отриманих нижче, ми представляємо розв'язки пов'язаних проблем, розглянутих Стоксом. Як уже зазначалося у вступі, Стокс [107] розв'язав задачу про коливання нескінченної площини з частотою  $\Omega$  і амплітуди  $c$  у в'язкій рідині. Якщо позначити за Стоксом  $x$  напрямком нормалі до площини, то для цієї задачі отримаємо відповідні рівняння Нав'є-Стокса (в декартових координатах) і граничну умову

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \mu' \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

$$V|_{x=0} = c \sin \Omega t. \quad (2.2)$$

У статті Стокса [107] (2.1) і (2.2) -- це рівняння (8) і (9) відповідно.  $V$  — поздовжня швидкість, а також  $\mu' = \nu$  різні позначення коефіцієнта молекулярної в'язкості. Розв'язок, отриманий Стоксом, має такий вигляд

$$V = c \exp\left(-\sqrt{n/2\mu'} x\right) \sin\left(nt - \sqrt{n/2\mu'} x\right). \quad (2.3)$$

Розв'язок у вигляді (2.3) не дозволяє перейти до граничного рівномірного руху, що відповідає  $n \rightarrow 0$ , оскільки в цьому випадку воно дорівнює нулю. Очевидно, тому Шліхтінг (див. 5.25 в [98]) наводить іншу граничну умову у вигляді

$$V|_{x=0} = c \cdot \cos nt \quad (2.4)$$

та розв'язку ([98], 5.26), що відповідає (2.4)

$$V = c \exp\left(-\sqrt{n/2\mu'} x\right) \cos\left(nt - \sqrt{n/2\mu'} x\right). \quad (2.5)$$

Тепер, при прямуванні  $n \rightarrow 0$ , з (2.5) виходить, що весь простір повинен рухатися зі сталою однаковою швидкістю, яка дорівнює швидкості площині. Стокс, мабуть, розумів неможливість, з точки зору фізичних законів збереження, змусити весь півпростір придбати швидкість рухомої площини і тим більше продовжувати рухатися з цією швидкістю. Намагаючись врятувати ситуацію, коли теорія не дає експериментального підтвердження розв'язку найпростішої задачі, Стокс отримав автомодельний розв'язок задачі про миттєвий розгін площини. Тепер гранична умова виражається за допомогою функції Хевісайда

$$V|_{x=0} = c \cdot H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ c, & t > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

За аналогією з теплопровідністю, використовуючи автомодельну координату у вигляді

$$\eta = y / 2\sqrt{vt}, \quad (2.7)$$

Стокс [108] отримав відповідний автомодельний розв'язок

$$V_x = c(1 - \operatorname{erf}(\eta)). \quad (2.8)$$

Для подальшого порівняння з отриманим далі розв'язком, важливо зазначити, що введення в (2.1) масштабів величин

$$[V] = c; [t] = 1/n; [x] = \sqrt{2\mu'/n}$$

призводить до наступного представлення безрозмірних розв'язків (2.3) і (2.5)

$$V = \exp(-x)\sin(t-x), \quad V = \exp(-x)\cos(t-x). \quad (2.9)$$

У ході досліджень ми, за логікою, підійшли до посталою питання про характер розв'язку у випадку найпростішої задачі

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad 0 = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \quad V_x|_{y=0} = c. \quad (2.10)$$

У співвідношеннях (2.10) координати  $x$  і  $y$  міняються місцями, а до швидкості додається індекс  $x$ . Задача (2.10) відповідає, за Стоксом, усталеному руху площини вздовж осі  $x$ . Що не так? Чому з постановки та розв'язку простої задачі (2.10) неможливо отримати експериментально підтверджений експоненціальний закон? Щоб зрозуміти причину цієї невідповідності, необхідно з'ясувати, на яких законах фізики ґрунтуються рівняння Нав'є-Стокса. Виводячи свої рівняння, Стокс використовував аналогію із законами теплопровідності. Ця аналогія ґрунтується на математичній еквівалентності наступних рівнянь

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu(y) \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad \text{та} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k(y) \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (2.11)$$

В (2.11)  $\nu(y)$  і  $k(y)$  є молекулярна дифузія і теплопровідність відповідно. Як відомо, сталість теплопровідності  $k(y)$  в (2.11) базується на просторовій ізотропії середовища, якої просто не має місця у примежовому шарі — області впливу однієї фази (тіла) на іншу (рідину).

Розглянемо площину, що рухається зі сталою швидкістю в нескінченній області нестисливої, за даних значень швидкості, рідини. Припустимо, що молекулярна в'язкість нестисливої рідини є змінною, принаймні в межах примежового шару. Будемо розглядати її як функцію відстані до твердої площини

$$\mu = \mu(y). \quad (2.12)$$

Рівняння Нав'є-Стокса для цієї задачі згідно з (2.12) має вигляд

$$0 = \frac{d}{dy} \left( \mu(y) \frac{dV_x}{dy} \right). \quad (2.13)$$

Нехай  $-\delta$ ,  $[V_x]=U$ ,  $[\mu]=\mu_0 = \max \mu$  масштаби значень цієї задачі.

Якщо їх вилучити як множники праворуч у рівняння (2.13) і розділити на загальний постійний множник (добуток), то рівняння не зміниться. Тому далі ми будемо розглядати безрозмірні величини, а їх позначення залишимо такими ж. Рівняння (2.13) тепер містить дві невідомі функції:  $\mu(y)$  а також  $V_x(y)$ . З метою замикання задачі, ми припускаємо, що виконується умова екстремуму витрати рідини. Іншими словами, серед усіх можливих нестисливих течій рідини, викликаних тертям площини з безрозмірною швидкістю

$$V_x|_{y=0} = 1, \quad (2.14)$$

ми будемо розглядати реалізацію лише тієї течії, для якої

$$J = \int_0^{\infty} V_x dy \Rightarrow \text{ext}. \quad (2.15)$$

Вираз (2.15) узгоджується з оригінальною інтерпретацією принципу П'єра Мопертюї [79]. За Мопертюї, якщо позначати  $m, V, S$  масу, швидкість і відстань відповідно, то дія у вигляді

$$I = mVs$$

досягає мінімального значення для істинної траєкторії. Це перший сформульований варіаційний принцип найменшої дії. Якщо рух є рівномірним, площина нескінченною, а рідина однорідною  $m = \text{const}$ ,  $s = \text{const}$ , то функціонал (2.15) відповідає мінімальній швидкості течії в примежовому шарі. Гарний огляд застосувань варіаційного числення для течії рідини наведено в [78]. До граничної умови (2.14) слід додати другу, очевидну умову

$$V_x(y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty. \quad (2.16)$$

Для знаходження невідомої функції  $\mu(y)$ , коли  $V_x(y)$  вже визначена, достатньо згідно (1.13) сформулювати одну граничну умову. Як буде показано далі, доцільно задавати

$$\mu|_{y=\delta} = 1. \quad (2.17)$$

У рівнянні (2.17)  $\delta$  – приблизне значення товщини примежового шару, при якому швидкість зменшується приблизно в 100 разів. Таким чином, задача визначається співвідношеннями (2.13)–(2.17). Оскільки будь-яка в'язкість рідини виникає лише за наявності градієнта швидкості, то можна з упевненістю записати

$$\mu(y) = f(dV_x / dy) \quad (2.18)$$

де  $f$  означає певну функцію. З іншого боку, ми використовуємо рівняння, подібне до рівняння турбулентної течії, де в'язкість є функцією координати. За аналогією припустимо, що в'язкість є функцією швидкості

$$\mu(y) = \mu(V_x(y)). \quad (2.19)$$

Порівнюючи співвідношення (2.18) і (2.19), легко зробити висновок

$$V_x(y) = \mu^{-1}(\mu(V_x)) = \mu^{-1}(f(dV_x / dy)) = g(dV_x / dy). \quad (2.20)$$

Згідно з теорією, для функціоналу вигляду

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, (dy/dx)) dx,$$

маємо відповідне рівняння Ейлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} \left( F_{y'} \right) = 0. \quad (2.21)$$

В рівнянні (2.21) використано такі позначення:

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}.$$

Рівняння Ейлера для екстремуму функціонала згідно з (2.15), (2.20), (2.21) має вигляд

$$-\frac{d}{dy} \left( \partial g / \partial \left( \frac{dV_x}{dy} \right) \right) = 0. \quad (2.22)$$

З (2.22) відразу випливає, що

$$\frac{\partial g}{\partial \left( \frac{dV_x}{dy} \right)} = C_1. \quad (2.23)$$

Використавши властивість інваріантності першого диференціалу та замінивши функцію  $g$  на  $V_x$ , з (2.23) отримуємо

$$\frac{dV_x}{dy} = C_1 \frac{d^2 V_x}{dy^2}. \quad (2.24)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.25) є

$$V_x(y) = A + B \exp(y/C_1). \quad (2.25)$$

Для випадку розглянутого руху площини згідно з граничними умовами (2.14) і (2.16) розподіл швидкостей має вигляд

$$V_x(y) = \exp(y/C_1). \quad (2.26)$$

Значення константи  $C_1$  визначається з умови співпадіння із розв'язком Стокса (2.9). В результаті отримується  $C_1 = -1$  і, таким чином,

$$V_x = \exp(-y). \quad (2.27)$$

Розв'язок (2.27) свідчить про правильність використання підходу варіаційного числення для задачі, що розглядається. Крім того, порівняння з експериментальним і теоретичним розподілами (див. рис. 1а) показує, що для безрозмірного значення  $y=5$  отримується зменшення значення швидкості приблизно у 100 разів (див. [68,48]). Щоб отримати наведений у всіх джерелах профіль швидкості оберненої задачі для розглянутої задачі обтікання нерухомої площини, достатньо відняти праву частину рівності (2.27) від одиниці:

$$u = 1 - \exp(-y). \quad (2.28)$$

Для зручності порівняння з іншими результатами вираз (1.28) наведено на рис. 1б)-в). Значення,  $1/C_1 = -0.0175$  використане на рис. 1б)-в) з метою узгодження із внутрішнім масштабом примежового шару. Звернемо увагу на одну нетривіальну деталь. Відповідно до (2.27), в'язкість рідини може зростати до нескінченності, оскільки вона повинна визначатися експоненціальною функцією із додатнім аргументом, що прямує до нескінченності. Однак у таких випадках вдаються до опису розв'язку в інших, визначальних величинах. Рівняння Нав'є-Стокса виведено в напруженнях, які зберігаються поперек примежового шару. І ця умова якраз виконується. Подібний приклад існує в механіці рідини – це модель точкового вихору, де швидкість на осі сягає нескінченності, але в цьому випадку використовується циркуляція, яка є константою усюди вздовж радіальної координати.

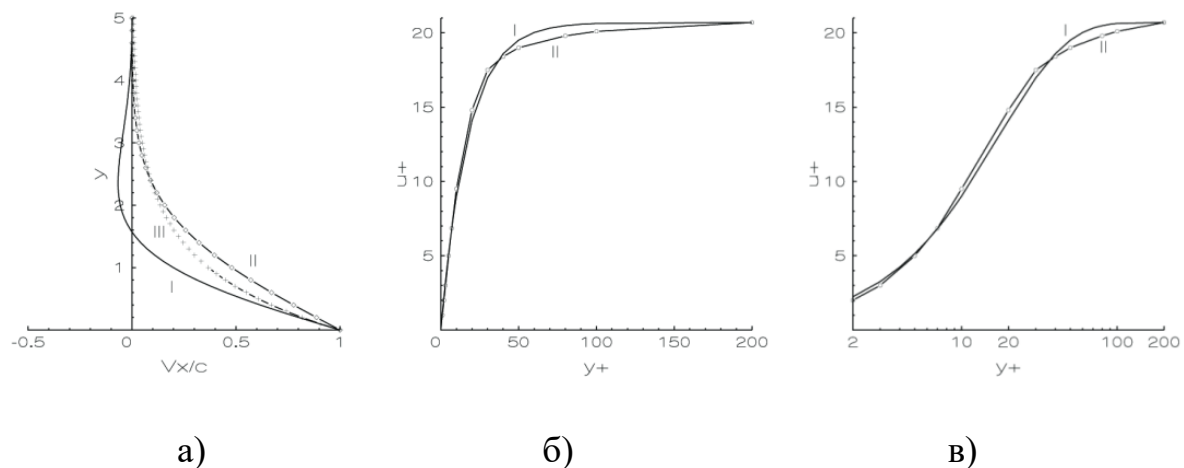


Рисунок 2.1. Розподіл поздовжньої складової швидкості: порівняння розв'язків а) (2.27) (III) з відомими близькими розв'язками: амплітуда розв'язку (2.9) (I), автомобільний розв'язок (2.8) (II) [108]; б)–с) (2.28) з розв'язками при малих числах Рейнольдса, отриманими за допомогою DNS [41].

Слід зазначити, що експоненціальний розв'язок у формі (2.28) може також апроксимувати двофазні низькорейнольдсові турбулентні течії [83]. У цьому випадку у формулі (2.28)

$$1/C_1 = -0.05.$$



## **Градiєнтний ламiнарний примежовий шар: течiя рiдини повз нерухому площину, яка викликана градиєнтом тиску.**

Наведенi вище дослiдження викликають природне здивування, оскiльки вимiрювання в аеродинамiчних трубах, а також iснуюча теорiя ламiнарного примежового шару пiдтверджують сталiсть молекулярної в'язкостi в примежовому шарi i в областi течiї в цiлому. Для вивчення цiєї ситуацiї необхідно звернутися до фiзики течiй. Давайте вiдповiмо на головне питання: якi сили обумовлюють течiю рiдини в кожному випадку? У випадку без-градиєнтної течiї це внутрiшнє тертя, яке повнiстю визначається градиєнтом швидкостi. Тому для течiї пiдiнтегральний вираз в функцiоналi (2.15) залежить лише вiд похiдної швидкостi. Iнший випадок являє собою градиєнтна течiя. Очевидно, така течiя створюється двома силами (як у нестационарних задачах, розв'язаних Стоксом [108]): градиєнтом тиску i внутрiшнiм тертям. Градиєнт тиску створює поле швидкостi, яке збурюється експериментальним об'єктом (тiлом), що утворює примежовий шар. Помилка Блазiуса полягає в тому, що в задачi про обтiкання рiдиною нерухомої пластини вiн виключив силу поздовжнього градиєнта тиску ([98], див. формули 7.5). Виявляється, течiя рiдини нiчим не викликана: немає сили, яка змусила б рiдину текти. Оскiльки всiх цiкавила обернена задача про рух пластини (крила), де дiйсно немає поздовжнього градиєнта тиску, то, вiрячи в оборотнiсть явищ, усi погоджувалися з Блазiусом. Якщо тепер припустити, що у функцiоналi витрати рiдини пiдiнтегральна функцiя формально залежить не тiльки вiд похiдної швидкостi, а й вiд самої швидкостi (визначеної поздовжнiм градиєнтом тиску), то, як буде показано зараз, значення молекулярної в'язкостi, виявляється, може бути сталим. Отже, розглянемо градиєнтну течiю, що описується рiвнянням

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{dy} \left( \mu(y) \frac{dV_x}{dy} \right) \quad (2.29)$$

з умовами (2.14), (2.15), (2.17). Замiсть умови (1.14) використовуємо умову

$$V_x(y=1) = 1. \quad (2.30)$$

Умова (2.30) означає досягнення зовнішньої межі (тут за масштаб прийнято товщину примежового шару) градієнтного примежового шару. Звичайно, це приблизно, оскільки чіткої зовнішньої межі примежового шару не існує. Тепер припустімо, що через зміну фізики явища (дві сили замість однієї), що

$$V_x(y) = g(V_x, dV_x / dy). \quad (2.31)$$

Співвідношення (2.31) дозволяє отримати замість (2.24) відповідне рівняння Ейлера

$$1 - \frac{d}{dy} \left( \partial g / \partial \left( \frac{dV_x}{dy} \right) \right) = 0. \quad (2.32)$$

Розв'язок рівняння (2.32) з урахуванням умов відсутності ковзання та умови (2.30) має вигляд

$$V_x(y) = y(2 - y). \quad (2.33)$$

Підстановка (2.33) у безрозмірне рівняння Нав'є-Стокса, що відповідає градієнтній течії

$$-1 = \frac{d}{dy} \left( \mu(y) \frac{dV_x}{dy} \right),$$

веде до

$$y + C_1^* = \mu(y)(2 - 2y). \quad (2.34)$$

З виразу (2.34) випливає, що при  $C_1^* = -1$  в'язкість є сталою і дорівнює

$$\mu = 1/2 = \text{Const}. \quad (2.35)$$

Отже, основна частина градієнтного примежового шару описується параболічним профілем, і в цьому випадку молекулярна в'язкість там стала. На рис. 2 наведені результати відомих теорій. Усі розв'язки, як і експериментальні дані [48], досить близькі до параболічного закону (2.33). Цим пояснюється прагнення всіх цитованих авторів наблизити свої розв'язки до параболічного закону.

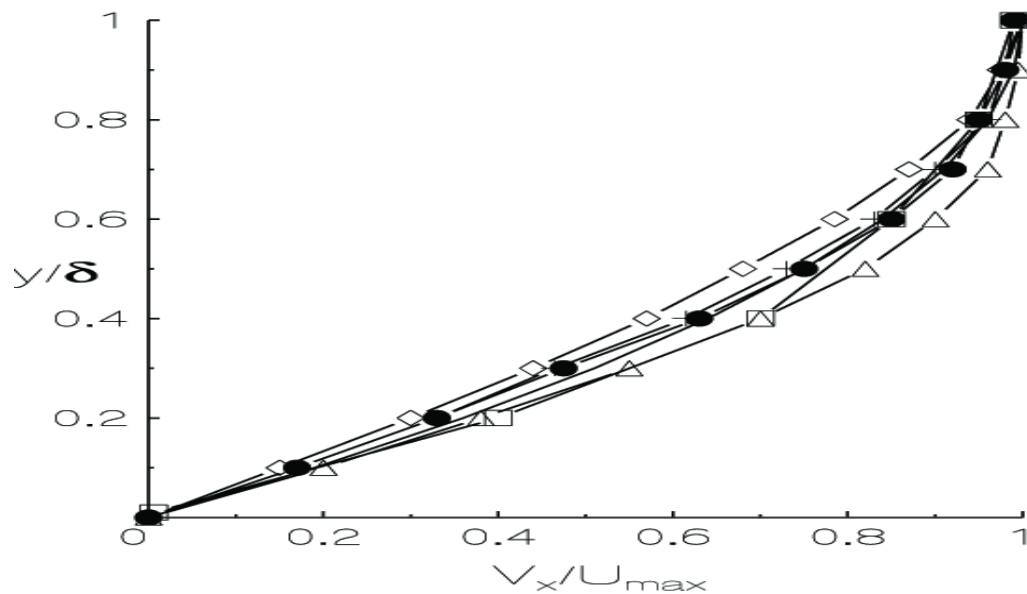


Рис. 2. 2. Поздовжня швидкість у ламінарно-градієнтному примежовому кордонному шарі нестисливої рідини на нерухомій поверхні. • [39], алмаз [61], □ [48], □ [88], \* [101], + [32], -- [2.32].

В якості подальшого дослідження доцільно застосувати використаний підхід до аналітичного опису турбулентного примежового шару.

## 2.2. Нестационарний нестисливий ламінарний примежовий шар: змінна у часі та просторі молекулярна в'язкість

У даному розділі розглядаються нестационарні течії нестисливої рідини в ламінарних примежових шарах:

- без-градієнтному нестационарному примежовому шарі, що утворюється під час прискореного руху нескінченної площини;
- градієнтному нестационарному примежовому шарі, який утворюється від течії рідини вздовж нерухомої площини.

Мета роботи – отримати на основі варіаційного підходу аналітичні розподіли для поля швидкостей у градієнтних і безградієнтних ламінарних нестационарних примежових шарах нестисливої рідини та порівняти їх із класичними, вказавши на недоліки останніх.

## Ламінарна нестационарна нестислива течія рідини внаслідок рівномірного розгону площини

Миттєво розігнати тіло до скінченної швидкості неможливо: потрібна нескінченно велика потужність. Тому, яким би малим не був час розгону ракети чи снаряда, він все одно скінчений. Площина теж розганяється або гальмується за скінчений час. Це говорить нам про те, що проблема ламінарного примежового шару, який постійно змінюється протягом скінченного часу, цілком реальна. Мабуть, тому Релей, як зазначено у вступі, розв'язав задачу рівномірного розгону площини до сталої швидкості [93]. Те, про що далі йдеться в цьому розділі, не можна вважати цілком оригінальним. Це скоріше місток між, з кожним днем дедалі важчим для сприйняття, класичним (старим) викладом і сучасним. Хоча формальні математичні позначення та представлення відрізняються від робіт Стокса [108] і Релея [93], по суті, це та сама фізична задача. У даній роботі не буде розглядатися задача гальмування: тільки розгін.

Швидкість рівномірного розгону площини за скінчений час  $\tau_b$  та подальшого стаціонарного руху ( $y=0$ ) описується за законом [8]

$$V_x|_{y=0} = U_0 \left[ \frac{t}{\tau_b} H(t) - \frac{t-\tau_b}{\tau_b} H(t-\tau_b) \right]. \quad (2.36)$$

У (2.36)  $H(t)$  є функцією Хевісайда. Про другу граничну умову вже згадувалося вище :

$$V_x(y=\infty) = 0.$$

Розв'язок рівняння Нав'є -Стокса

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

з перерахованими граничними умовами та початковою умовою (яка автоматично виконується в (2.36)) має вигляд (порівняйте з розв'язками Стокса [108], (формули 185,186) та Релея [93], формули 17,18):

$$V_x(y,t) = \frac{U_0 y}{2\sqrt{\nu\pi}} \int_0^t \frac{\exp\left[-y^2/4\nu(t-\tau_b)\right]}{(t-\tau)^{3/2}} \left( \frac{\tau}{\tau_b} H(\tau) - \frac{\tau-\tau_b}{\tau_b} H(\tau-\tau_b) \right) d\tau. \quad (2.37)$$

Інтеграл правої частини (2.37) зручно розкласти на суму наступних двох інтегралів:

$$I_1(y,t) = \frac{U_0 y}{2\sqrt{\nu\pi}} \int_0^{\tau_b} \frac{\exp\left[-y^2/4\nu(t-\tau_b)\right]}{(t-\tau)^{3/2}} \frac{\tau}{\tau_b} d\tau$$

$$I_2(y,t) = \frac{U_0 y}{2\sqrt{\nu\pi}} \int_{\tau_b}^t \frac{\exp\left[-y^2/4\nu(t-\tau_b)\right]}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$$

Ці інтеграли відповідно дорівнюють

$$I_1(y,\tau_p) - I_1(y,0) \quad \text{і} \quad I_2(y,t) - I_2(y,\tau_p),$$

$$\text{де } I_1(y,t) = \frac{U_0 y}{\tau_b 2\nu\sqrt{\pi}} \left\{ 2\sqrt{t-\tau_b} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{y^2}{(t-\tau_b)}\right] + \left( y\sqrt{\pi} + \frac{2t\sqrt{\pi\nu}}{y} \right) \operatorname{erf}\left[\frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{\nu(t-\tau_b)}}\right] \right\},$$

$$I_2(y,t) = \frac{U_0}{\tau_b \sqrt{\nu}} \operatorname{erf}\left[\frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{\nu(t-\tau_b)}}\right]. \quad (2.38)$$

Легко бачити, що розв'язок (2.37-2.38) за умови миттєвого ( $\tau_b = 0$ ) приведення площини в рух збігається з розв'язком Стокса [108,93] – другим інтегралом (2.38). Але, як очевидно, за відсутності другої, нерухомої площини, яка знаходиться на скінченій відстані від рухомої, розв'язок (2.38) не матиме лінійного розподілу [48]. Ми також не беремо до уваги константу через

співвідношення (1.2) (кінцева потужність за наявності дисипації не може привести весь нескінченний простір у рух із сталою швидкістю). Доступна в Інтернеті інформація про дослідження ламінарного примежового шару [73] вказує на те, що всі теорії, починаючи з роботи Блазіуса [39] про обтікання плоскої пластини, є нічим іншим, як хорошим наближенням параболічного закону, який відповідає руху рідини під дією поздовжнього градієнта тиску і, звичайно, не відповідає руху тіла в рідині.

Як згадувалося вище, класичний підхід призводить до нефізичних результатів: після розгону площини, з часом (див. (1.1)) градієнт швидкості рідини, що контактує з поверхнею площини, невблаганно асимптотично прагне до нуля. Виходить, що розігнавши площину до скінченної швидкості, нам більше не потрібно докладати подальших зусиль для підтримки руху з постійною швидкістю. Але, вибачте, куди зникає в'язке розсіювання? Звичайно, не зникає. Сміливість цих тверджень підтверджується результатами роботи [73], де доведено, що в примежовому шарі нестисливої ламінарної течії рідини в'язкість за відсутності поздовжнього градієнта тиску не може залишатися сталою: вона повинна бути функцією відстані до твердої поверхні, щоб забезпечити сталість напруження зсуву в течії (докладніше див. [73]). Щоб уникнути фізичної неузгодженості, пов'язаної з порушенням основного закону фізики про збереження енергії, застосовуємо ідеї нового підходу, започатковані в [73].

### **Нестаціонарна ламінарна безградієнтна течія в примежовому шарі: варіаційний підхід**

Зараз доречно зазначити, що підхід, застосований у [73], відповідає першому в історії варіаційному принципу механіки П'єра Мопертюї [79].

Нестаціонарна безградієнтна течія нестисливої рідини в примежовому шарі описується узагальненим рівнянням Нав'є-Стокса

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (2.39)$$

з урахуванням змінного коефіцієнта в'язкості  $\mu(y,t)$  і також наступними початковою та двома граничними умовами (надалі, без зміни позначень, всі шукані величини мають безрозмірну форму [73])

$$V_x(t \rightarrow \infty) = 1; V_x(y=0) = f(t), V_x(y \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (2.40)$$

Тому функціонал витрати рідини тепер можна представити у вигляді

$$J = \int_0^{\infty} V_x \left( \frac{\partial V_x}{\partial t}, \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dy. \quad (2.41)$$

Рівняння Ейлера екстремуму функціонала (2.41) має такий вигляд

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) = 0.$$

Оскільки це рівняння має виконуватися протягом будь-якого моменту часу, то з асимптотичного збігу при великих значеннях часу (див. також випадок градієнтного течії нижче) ми отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) = 0.$$

Як і в [73], переведемо попереднє рівняння до вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} \frac{1}{\frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{1}{\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}} \right) = 0 \quad (2.42)$$

Якщо безпосередньо, тобто відомими підходами, розв'язувати задачу, то виходить щось незрозуміле. Спробуємо використати метод розділення змінних Фур'є. Відповідно до цього методу,

$$V_x = V_x(t, y) = T(t) \cdot Y(y). \quad (2.43)$$

Після підстановки (2.43) у (2.42), (2.43) перетворюється на

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{dt} \frac{1}{\frac{d^2 T}{dt^2}} \right) = 0, \quad \frac{d}{dy} \left( \frac{dY}{dy} \frac{1}{\frac{d^2 Y}{dy^2}} \right) = 0. \quad (2.44)$$

З (2.44) випливає

$$\frac{dT}{dt} = C_1^t \frac{d^2 T}{dt^2}, \quad \frac{dY}{dy} = C_1^y \frac{d^2 Y}{dy^2}. \quad (2.45)$$

з розв'язками у формі

$$T(t) = A_t + B_t \exp\left(\frac{t}{C_{1t}^t}\right), Y(y) = A_y + B_y \exp\left(\frac{y}{C_{1y}^y}\right) \quad (2.46)$$

У (2.45) -- (2.46)  $C_1^t, C_1^y, A_t, B_t, A_y, B_y$  — константи інтегрування. Деякі з них знаходяться з наступних початкових і граничних умов

$$T(0) = 0, \quad T(\infty) = 1; \quad Y(0) = 1, \quad Y(\infty) = 0. \quad (2.47)$$

В результаті шуканий розв'язок набуває вигляду:

$$V_x(t, y) = \left(1 - \exp(t/C_1^t)\right) \exp(-y). \quad (2.48)$$

У розв'язку (2.48) константа  $C_1^y = -1$  така ж, як і для випадку стаціонарної течії [107]. Константу  $C_1^t$  буде визначено пізніше. З (2.48) випливає, що

$$V_x(t, y) \rightarrow \exp(-y), \quad t \rightarrow \infty,$$



і це узгоджується з результатами (течії із малими числами Рейнольдса) сучасних робіт [39,80] (детальніше див. [73]).

### **Нестационарна ламінарна градієнтна течія у примежовому шарі: варіаційний підхід**

Рух описується узагальненим рівнянням Нав'є -Стокса зі змінною в'язкістю всередині примежового шару

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \right),$$

початковими та граничними умовами (2.40). З умов задачі також випливає, що

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = Const.$$

Надалі, враховуючи фізику примежового шару (сила в'язкості того ж порядку, що й сила інерції та градієнт тиску), в безрозмірних величинах  $Const = 1$ . Для використання варіаційного підходу припустимо, як це вже було зроблено для стаціонарної течії [73], що тепер

$$J = \int_0^{\infty} V_x \left( V_x, \frac{\partial V_x}{\partial t}, \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dy. \quad (2.49)$$

Відповідне рівняння Ейлера для екстремуму функціонала тепер має такий вигляд

$$1 - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) = 0. \quad (2.50)$$

Знову використовуємо метод розділення змінних і отримуємо

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{dt} \frac{1}{\frac{d^2T}{dt^2}} \right) = 1 - \frac{d}{dy} \left( \frac{dY}{dy} \frac{1}{\frac{d^2Y}{dy^2}} \right) = Const. \quad (2.51)$$

Поки що значення константи в рівняннях (2.51) нам не відоме. Тому знайдемо їх загальний розв'язок. Для цього, як і вище, знаходимо перші інтеграли (2.51). Ми маємо

$$\frac{dT}{dt} = \left( Const \cdot t + C_1^t \right) \frac{d^2T}{dt^2}, \quad \frac{dY}{dy} = \left( (1-Const) \cdot y + C_1^y \right) \frac{d^2Y}{dy^2} \quad (2.52)$$

Загальний розв'язок, що відповідає (2.52), є

$$V_x(y,t) = \left[ A_y + B_y \left( y - \frac{C_1^y}{-1+Const} \right)^{\frac{-2+Const}{-1+Const}} \right] \left[ A_t + B_t \left( t + \frac{C_1^t}{Const} \right)^{\frac{1+Const}{Const}} \right]. \quad (2.53)$$

Розв'язок (2.53) асимптотично, коли  $Const \rightarrow 0$ , перетворюється на розв'язок стаціонарної задачі:

$$\lim_{Const \rightarrow 0} V_x(y,t) = \left[ A_y + B_y \left( y + C_1^y \right)^2 \right] \left[ A_t + B_t \exp(t/C_1^t) \right]. \quad (2.54)$$

Отже, покладемо  $Const = 0$ . Після виконання всіх граничних умов (за просторовою координатою та за часом) отримуємо наступний розв'язок

$$V_x(y,t) = \left( 1 - \exp(t/C_1^t) \right) \cdot y(2-y). \quad (2.55)$$

Як видно, при  $C_{1t} < 0$

$$V_x(y,t) \rightarrow y(2-y), \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.56)$$

Вираз (2.56) повністю співпадає з розв'язком задачі у випадку стаціонарної течії [73].

### Функції в'язкості, напруження зсуву та потужності сили тертя

На відміну від стаціонарного руху, як впливає з отриманих вище розв'язків, тепер в'язкість є функцією часу та просторової координати (у випадку без-градієнтного примежового шару):

$$\mu = \mu(t, y) \quad (2.57)$$

Для безградієнтного примежового шару підстановка розв'язку (2.48) у рівняння (2.38) призводить до співвідношення:

$$-1/C_1^t \cdot \exp(t/C_1^t) \exp(-y) + \varphi(t) = \mu(t, y) \left[ 1 - \exp(t/C_1^t) \right] \exp(-y),$$

з якого випливає, що

$$\mu(t, y) = \frac{\exp(t/C_1^t) \exp(-y) + \varphi(t)}{C_1^t \left[ 1 - \exp(t/C_1^t) \right] \exp(-y)}, \quad (2.58)$$

де  $\varphi(t)$  є деякою функцією часу, яка виникає внаслідок частинного інтегрування. Оскільки стаціонарну течію можна розглядати як граничний випадок нестаціонарної при  $t \rightarrow \infty$ , то, порівнюючи з розв'язком стаціонарної задачі, отримуємо, що для будь-якого моменту часу  $t > 0$ :

$$\mu(t, y) = \frac{-1/C_1^t \cdot \exp(t/C_1^t) \exp(-y) + 1}{\left[ 1 - \exp(t/C_1^t) \right] \exp(-y)} \rightarrow \exp(y), \quad t \rightarrow \infty.$$

Для градієнтної течії, згідно з розв'язком (2.55) і рівнянням (2.38), отримуємо

$$-\frac{1}{C_1^t} \exp\left(t/C_1^t\right) y(2-y) = 1 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(2-2y) \left( 1 - \exp\left(t/C_1^t\right) \right) \right).$$

Звідки, після інтегрування по  $y$ , отримуємо:

$$\mu(t, y) = \frac{\psi(t) - 1/C_1^t \cdot \exp\left(t/C_1^t\right) \cdot \left(y^2 - y^3/3\right) - y}{2(1-y) \left(1 - \exp\left(t/C_1^t\right)\right)}. \quad (2.59)$$

При  $t \rightarrow \infty$  течія стає стаціонарною. Тоді, з умови узгодження зі стаціонарною течією, виходить  $\psi(t) = 1$ . Нарешті, функція в'язкості має такий вигляд

$$\mu(t, y) = \frac{1 - y - 1/C_1 \cdot \exp\left(t/C_1\right) \cdot \left(y^2 - y^3/3\right)}{2(1-y) \left(1 - \exp\left(t/C_1\right)\right)} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Функції в'язких напружень знаходяться за формулою

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y}. \quad (2.60)$$

Для без-градієнтного прилежого шару, згідно з (2.58) і (2.60), отримуємо

$$\tau_{xy} = - \left( 1 - 1/C_1^t \cdot \exp\left(t/C_1^t\right) \exp(-y) \right) \rightarrow -1, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.61)$$

Для випадку градієнтного прилежого шару вона отримується аналогічно з (2.59) і (2.60),

$$\tau_{xy} = 1 - y - \frac{1}{C_1^t} \exp\left(\frac{t}{C_1^t}\right) \left(y^2 - y^3/3\right) \rightarrow 1 - y, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.62)$$

Важливо відзначити, що коли рідина тече вздовж нерухомого тіла (градієнтний примежовий шар), поверхнєве напруження зсуву, що діє збоку рідини на площину

$$\tau_{xy} = 1, \quad y=0, \quad t \geq 0$$

завжди стає і, звичайно, спрямоване за потоком рідини, оскільки саме рух рідини спричиняє появу напружень.

На практиці важливо знати в кожен момент часу потужність сили тертя, яка визначається за формулою

$$P = \tau_{xy} \cdot V_x. \quad (2.63)$$

Відповідно до (2.63), для без-градієнтного примежового шару з урахуванням виразів для швидкості (2.48) і напруження зсуву (2.51) отримаємо

$$P(t, y) = \left(1 - \exp(t/C_1^t)\right) \exp(-y) \left(-1 + 1/C_1^t \times \exp(t/C_1^t) \exp(-y)\right). \quad (2.64)$$

Для градієнтного примежового шару після підстановки виразів (2.55), (2.62) у (2.63) отримаємо

$$P(y, t) = \left(1 - \exp(t/C_1^t)\right) \cdot y(2-y) \left(1 - y - 1/C_1^t \exp(t/C_1^t) \left(y^2 - y^3/3\right)\right). \quad (2.65)$$

Якщо порівняти вирази (2.61—2.63) з (1.1), то сенс наведених міркувань стане зрозумілим: співвідношення (2.57) є наріжним каменем усієї цієї теорії. Саме завдяки можливості зміни молекулярної в'язкості через примежовий шар отримуються фізично відповідні розв'язки нестационарних задач. Ці розв'язки, з одного боку, не суперечать закону збереження енергії (дотичні напруження на поверхні площини не зникають при переході руху від нестационарного до стаціонарного), а з іншого – повністю асимптотично узгоджені зі своїми аналогами для стаціонарних задач. Нарешті, ці аналоги, головне, узгоджуються з відповідними результатами існуючих експериментів і теорій [73].

Для отримання явних графічних залежностей також необхідно визначити константу  $C_1^t$  у розв'язках (2.48), (2.55). Тут доречно використати недавню роботу Шреаса Мандре [78], де розглядається варіаційна задача про спосіб прискорення плоскої пластини скінченної довжини з обмеженням на доступну потужність. Для функції прискорення там отримано таке співвідношення ([78], формула (3.27a))

$$f(t') = \left(1 - \exp(-2.62t')\right)^{1/4}. \quad (2.66)$$

Якщо спробуємо знайти  $C_1^t$  з умови рівності розв'язку (2.48) для  $y=0$  (2.66), то виходить

$$C_1^t \approx -0.25.$$

Проте аналіз графічних залежностей, а також абсолютний аналіз тенденції швидкості до нуля (подальше спадання не перевищує 1%), свідчить на користь того, що

$$C_1^t \approx -0.2. \quad (2.67)$$

На рис.2.3 показана еволюція у часі розподілу швидкості. Добре видно, що отриманий розв'язок (2.48) досягає асимптоти (див. рис. 2.3б), тобто стаціонарного розв'язку, який узгоджується з експоненціальним зменшенням амплітуди (див. [108, 73]). Більш того, вже одразу після розгону (безрозмірний час дорівнює одиниці) криві практично збігаються в наступні моменти часу. Чого не можна сказати про автотомельний розв'язок: з часом цей розв'язок прямує у фізичних координатах до сталого значення (див. рис. 2.3а). А цього неможливо досягти через наявність в'язкої дисипації. Якщо вважати верхню криву на рис. 1а асимптотою для стаціонарної течії, то експериментальних даних про такий розподіл швидкостей ми не знайдемо [48].

На рис. 2.5 показано порівняння функцій напруження зсуву на поверхні рухомої площини. Це розв'язок (2.61) та розв'язок Релея (див. [93], (2.50)–(2.51)). Оскільки рівняння Нав'є-Стокса є рівняннями динаміки у напруженнях, увага приділяється функції напружень, і особливо на поверхні. Згідно з розв'язком Релея, напруга зсуву лише збільшується під час прискорення, а потім, з невідомих причин, зменшується до нуля, дозволяючи, як згадувалося вище, існування вічного двигуна — руху без подальшого підведення енергії ззовні. Що стосується залежності від часу напруження зсуву в отриманому розв'язку, то ця залежність вказує на сталі значення, яке відповідає стаціонарному (сталому – у цій задачі) значенню, що узгоджується з існуючими уявленнями про цей вид руху. Той факт, що напруження в початковий момент часу максимальне, цілком узгоджується з таким поняттям, як тертя спокою: це явище відбувається саме під час надання тілу імпульсу, власне, розгону його до сталої швидкості. З технічної, а також енергетичної точки зору, цікавить залежність від часу потужності, витраченої на розгін, а потім і на підтримку стаціонарного руху.

На рис. 2.5 наведено залежності для потужності сили тертя об поверхню рухомої площини. Добре видно, що потужність, необхідна для розгону площини, зростає, як під час розгону зі сталим прискоренням (Релей [93]), так і згідно з співвідношеннями (2.48) і (2.61). Однак, якщо вказане зростання для представленої в цій статті моделі замінити на сталі значення, що досягається (асимптоти), то, згідно з розв'язком Релея, потужність, що є необхідною для підтримки стаціонарного руху, зменшується з часом аж до нуля.

## Обговорення

Звичайно, використовувати результати задачі про рух нескінченної площини для тіл зі скінченними розмірами, хоча б у напрямку руху, не зовсім коректно. Але, бачте, в'язка дисипація нікуди не зникає навіть у випадку нескінченної області (формула (1.2)), а отже, в кожен момент часу після досягнення стаціонарного режиму руху необхідна скінченна потужність, щоб

підтримувати цей рух. З іншого боку, відомо, що при обрахунку тертя, як для зовнішньої задачі, так і для внутрішньої, опір існує на всій поверхні твердого тіла. Наприклад, при розрахунку опору трубопроводу довжина має суттєве значення: чим довша труба, тим більш потужна помпа потрібна для прокачки рідини. Не спостерігається такого явища, коли після певної ділянки труби опір вже більше не зростає. Такий висновок, якщо його припустити як наслідок сталості молекулярної в'язкості, суперечить реаліям. Крім того, якщо площина є напів-нескінченою, то при її обтіканні наявна область встановлення течії, поза якою має місце той самий рух, що і для нескінченної площини. Наявна сучасна теорія має багато недоліків, які є прогалинами в наших знаннях. Аби усунути ці прогалини, як виявляється, необхідно розробляти нові підходи щодо постановки та розв'язання математичних задач – теж нових. Що стосується представленого у даній роботі підходу, то він себе гарно зарекомендував в задачі про стаціонарну течію [73]. Зокрема, отримані в [73] результати гарно узгоджуються із експериментальними даними.

Методи дослідження є суто теоретичними, а результати аналізуються шляхом порівняння з наявними теоретичними та експериментальними даними та відповідністю до фундаментальних законів фізики, зокрема закону збереження енергії. Ці методи базуються на побудові аналітичних математичних моделей, що представляють собою диференціальні рівняння в частинних похідних, доповнених відповідними фізичними початковими та граничними умовами. Крім того, використовуються диференціальні рівняння Ейлера теорії екстремуму функціонала (в даній роботі це екстремум втрати рідини поперек перерізу примежового шару). При розв'язуванні цих рівнянь використовується відомий метод розділення змінних Фур'є. Довільні функції часу, що виникають при частинному інтегруванні (за однією зі змінних – просторовою координатою), визначаються з умов асимптотичної прямування розв'язків нестационарних задач до відповідних до них розв'язків стаціонарних задач.



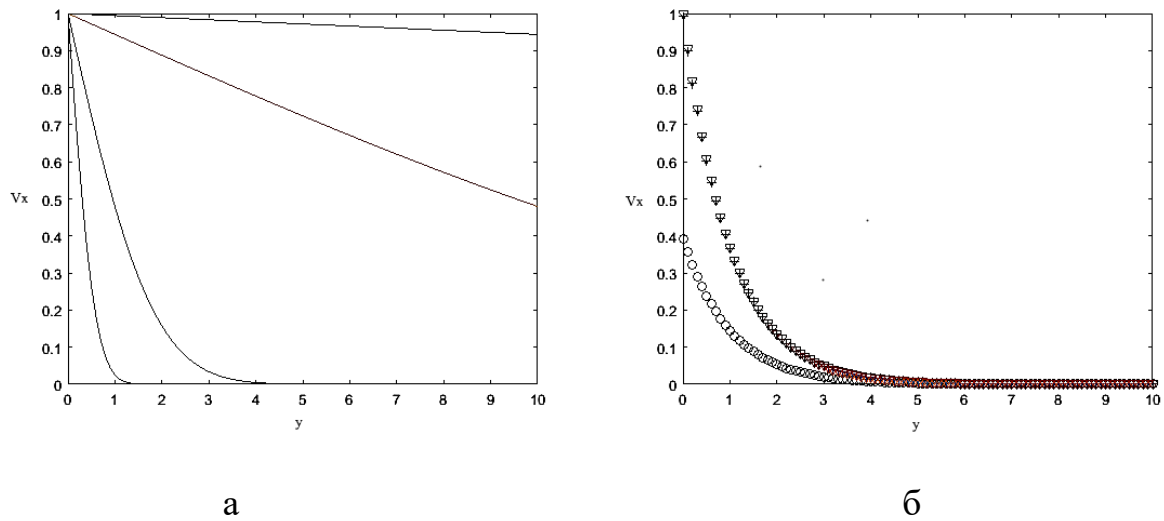


Рис. 2.3. Еволюція в часі розв'язку Стокса (рис. а)) та розв'язку (2.48) (рис. б). На рис. а подано моменти безрозмірного часу 0,1, 1, 10, 100, 1000, 10000; на рис. б дорівнюють 0,1, 1 і 2 відповідно.

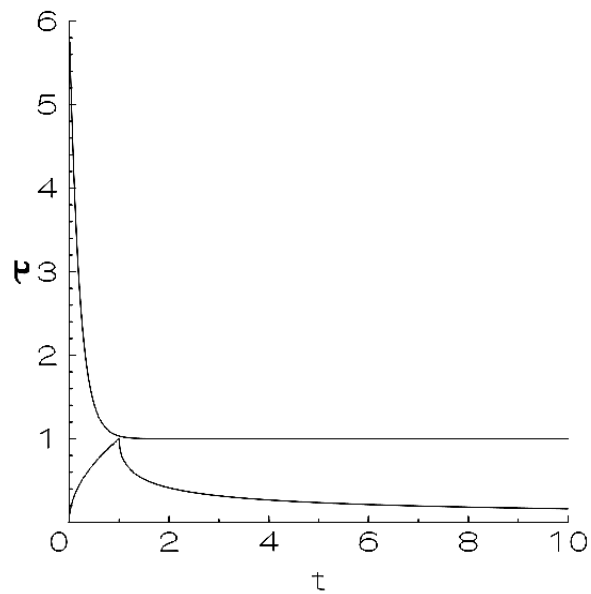


Рис. 2.4. Залежність напруги зсуву від часу на плоскій поверхні (безрозмірні значення): верхня крива – розв'язок (2.61), нижня – розв'язок Релея, [93], формули (2.50)-(2.51).

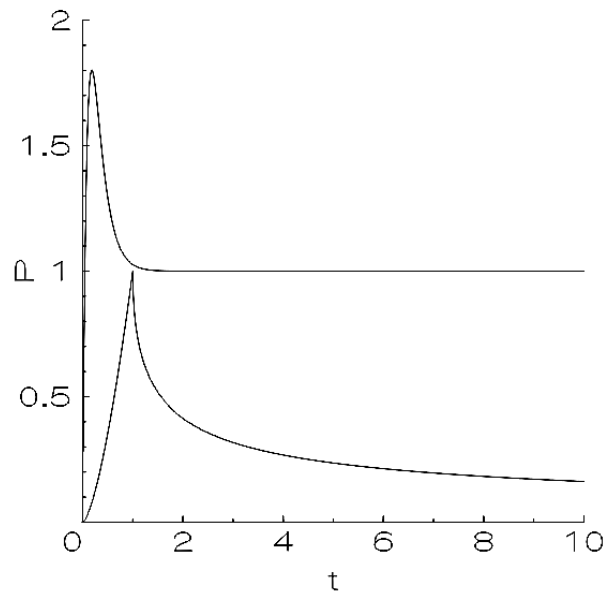


Рис. 2.5. Залежність потужності сили тертя об плоску поверхню від часу (безрозмірні величини): верхня крива – розв’язок (2.64), нижня – розв’язок Релея, [93], формули (2.50)-(2.51) .

Представлені результати мають принципове значення для розуміння фізики обтікання частин літака, оскільки вказують на суперечливість існуючого уявлення про оборотність прямої та оберненої задач: руху тіла в нерухомій рідині та обтікання рідиною нерухомого тіла.

### 2.3. Розширення теорії на складну геометрію.

У якості складної геометрії будемо вважати тіло обертання (див. рис.). Саме носова і прямолінійна частини фюзеляжу літака є тілами обертання. Оберемо у площині меридіального перерізу поверхні тіла (рис. ) координати  $x, y$  та складові швидкості  $V_x, V_y$  так само, як при обтіканні плоского профілю. Разом із тим, відмітимо і звичайні циліндричні координати точки  $M(r, z)$  та відповідні їм компоненти швидкості  $V_r, V_z$ ; кутова координата, так як і азимутальна (окружна) компонента швидкості, в рівняннях збереження кількості руху будуть відсутніми. Рівняння Нав’є-Стокса будуть тоді мати такий вигляд:

$$\rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right),$$

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \mu \frac{V_z}{r^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial}{\partial z} (rV_z) = 0. \quad (2.68)$$

В припущенні, що тіло обертання має досить велике подовження, прийmemo за малу величину кут  $\alpha$ , який утворено дотичною до меридіального контуру тіла із віссю тіла. Це припущення не має місця поблизу передньої критичної точки, якщо тіло є тупоносим, тобто якщо кут  $\alpha$  є близьким до  $\pi/2$  і поблизу кормової критичної точки, де  $\alpha$  також часто помітно відрізняється від 0.

В теорії примежового шару неточність розв'язку в області початку формування шару слабо впливає на подальший його розвиток за потоком.

В припущенні малості  $\alpha$  рівняння (2.68) дозволяють провести наближену заміну  $V_z$  на  $V_x$ ,  $V_r$  на  $V_y$ , а похідні  $\frac{\partial}{\partial z}$  на  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial r}$  на  $\frac{\partial}{\partial y}$ . Тоді отримаємо таку наближену систему рівнянь

$$\rho \left( \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{V_y}{r^2} \right),$$

$$\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) + \mu \frac{V_x}{r^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (rV_y) + \frac{\partial}{\partial x} (rV_x) = 0. \quad (2.69)$$

Оскільки для примежового шару, де  $r \geq r_0 > 0$ , доданки  $\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}$  та  $\frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial y}$  є нехтовно малими, то перше рівняння перетворюється на

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 .$$

Якщо  $U(x, y) = V_x$  на зовнішній межі примежового шару, то отримаємо таку систему рівнянь:

$$\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (rV_y) + \frac{\partial}{\partial x} (rV_x) = 0 \quad (2.69)$$

Якщо  $r = r_0(x) + y \cos \alpha$ , то рівняння нерозривності замінюється на

$$\frac{\partial}{\partial y} (r_0 V_y) + \frac{\partial}{\partial x} (r_0 V_x) = 0. \quad (2.70)$$

Отже, рівняння (2.69)-(2.70) по суті є такими самими, як і для плоского примежового шару. Так, на циліндрі  $r = r_0 = \text{Const}$  маємо той самий примежовий шар, що і на пластині. А для  $r = r_0(x) \neq \text{Const}$ , при  $\alpha \ll 1$ , перенесення результатів для плоских примежових шарів є наближеними. Ось чому, наприклад, розподіл швидкості у плоскому каналі цілком збігається із розподілом швидкості у трубі із круглим перерізом. Так само, примежовий шар на поверхні фюзеляжу є таким самим як і на поверхні площини. За виключенням початку носової області, де  $\alpha \approx \pi / 2$ .

### Висновки до розділу.

Запропоновано оригінальний підхід до аналітичного опису сталого ламінарного примежового шару нестисливої рідини через відсутність фізично підтверженого розв'язку найпростішої задачі про стаціонарний рух нескінченної площини в рідині, що її нерухомою на нескінченності. Як було показано вище, Стокс, намагаючись замкнути систему рівнянь, припустив у своїй моделі стале значення молекулярної в'язкості. Ретельне дослідження виявило причину невідповідності. Стокс використав аналогію з другим законом

Фур'є, де теплопровідність є константою. Але в примежовому шарі не має місця сталість теплопровідності, оскільки там порушується просторова ізотропія середовища. Зі сталістю в'язкості ситуація набагато

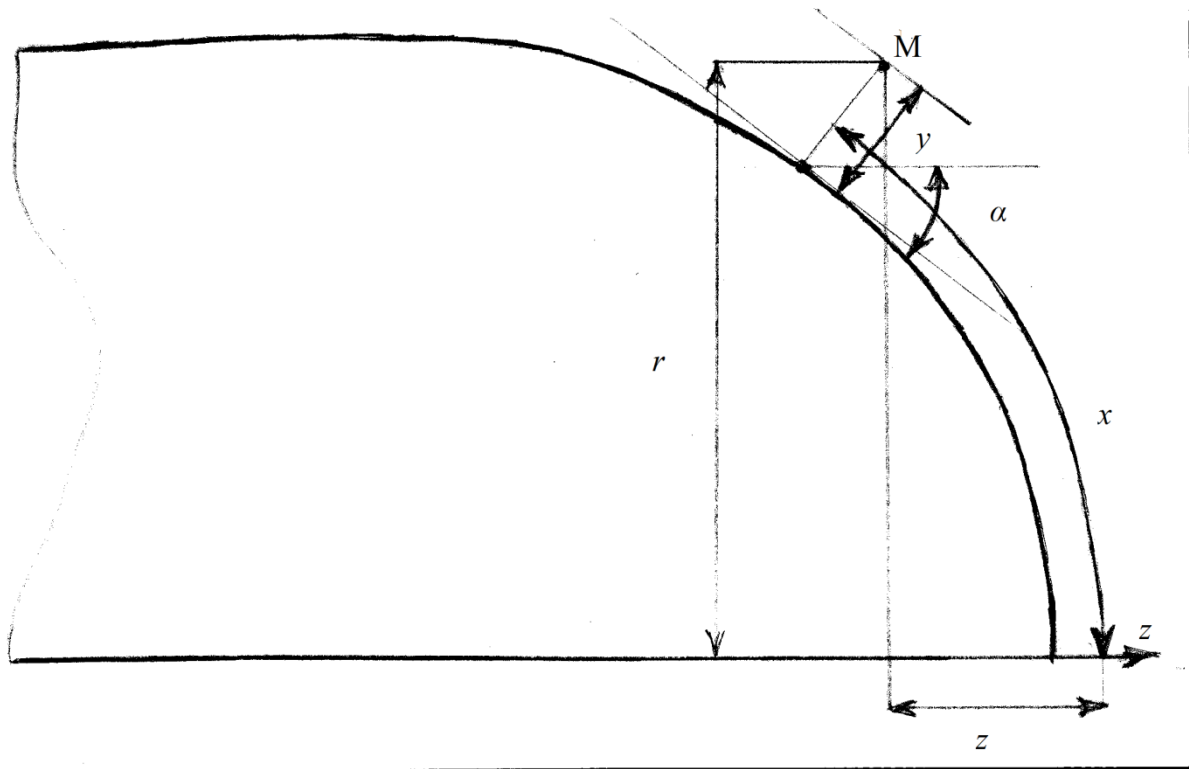


Рис. 2.6. Системи координат для опису течії в примежовому шарі вдовж криволінійної поверхні.

складніша. Як з'ясувалося в ході наведених вище досліджень, для безградієнтного примежового шару в'язкість дійсно, за аналогією з теплопровідністю, повинна бути змінною, щоб отримати експериментально підтвержену залежність експоненціального зменшення амплітуди швидкості зі зростанням величини відстані від площини. А для градієнтного примежового шару через іншу фізику явища (наявність поздовжнього градієнта тиску) вдалося, на підставі варіаційного числення, показати, що в'язкість всередині примежового шару може бути сталою, а розподіл швидкостей описується

відомим параболічним законом, який з високою точністю (5%) відповідає всім відомим теоріям примежового шару та експериментальним даним. Розв'язки нестационарних задач коливання

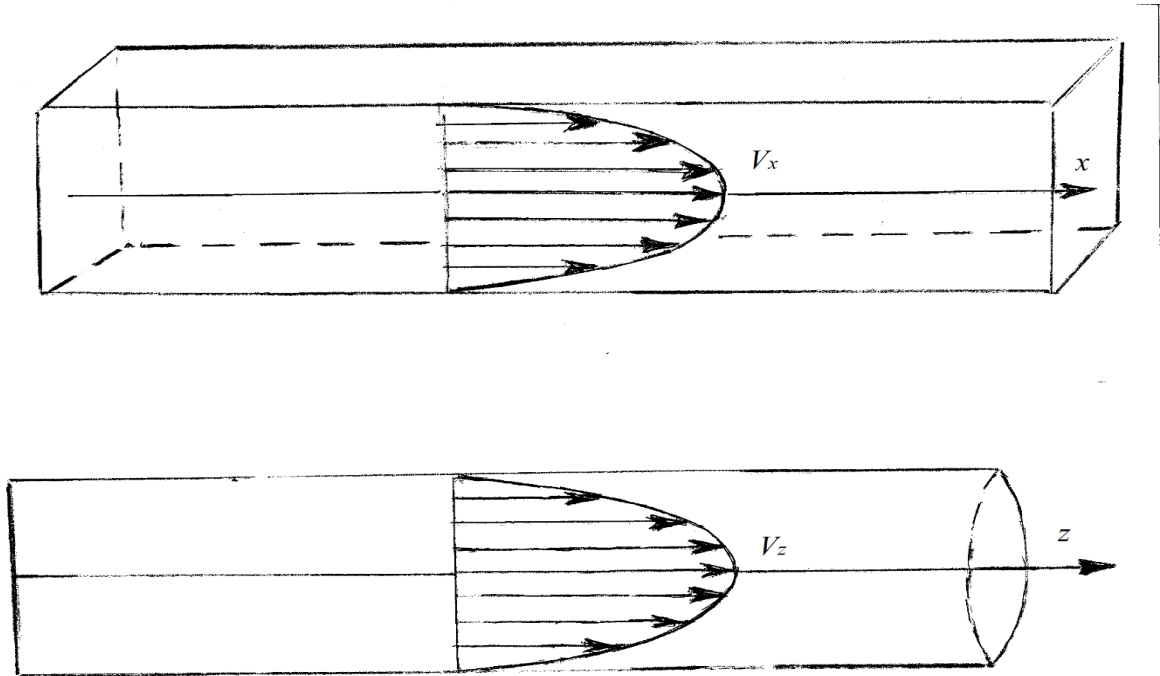


Рис. 2.7. Профілі швидкості в ламінарній течії рідини в плоскому каналі і в прямолинійній трубі з круговим перерізом.

площини і миттєвого приведення площини в рух, отримані Стоксом, засновані на сталості в'язкості і мають ту ж властивість, що і градієнтний стаціонарний примежовий шар, а саме: діють не одна, а дві сили на рідину - внутрішнє тертя та інерція. Таким чином, для опису ламінарного примежового шару нестисливої рідини, загалом, слід використовувати змінну в'язкість у рівняннях Нав'є-Стокса, як це робиться в прямому чисельному моделюванні (DNS). Для математичного замикання системи рівнянь можна використати умову екстремуму функціоналу витрати рідини.

У стаціонарному обтіканні нерухомого тіла рівномірною на нескінченності тучією рідини молекулярну в'язкість можна вважати сталою, а для найпростішої геометрії, яка є нескінченною площиною, примежовий шар

описується параболічним законом для розподілу швидкості. Чого не можна сказати про рух тіла в нерухомій рідині. Тут, на прикладі нескінченної площини, умова сталості напруження зсуву поперек примежового шару (через відсутність поздовжнього градієнта тиску) невблаганно призводить до вимоги змінного характеру молекулярної в'язкості. Підхід, викладений у цьому розділі, дозволив отримати фізично послідовний опис примежового шару нестисливої ламінарної течії, який виражається в наявності в будь-який час напруги тертя рухомого тіла об нерухому рідину - або навпаки.

Як показано в даному розділі, на швидкостях, що не перевищують порядок числа Маха  $Ma = 0,2$  (тобто до 70 м/с), що характерно для злітного режиму і з математичної точки зору відповідає нестисливій течії, у наближенні ламінарного примежового шару молекулярна в'язкість є змінною залежно від відстані до поверхні тіла та часу. Використовувана в даний час модель Стокса, заснована на сталості молекулярної в'язкості для нестисливої течії, призводить до свідомо помилкових результатів: після прискорення тіла у в'язкій рідині з часом виявляється, по суті, можливість існування вічного двигуна.

Нарешті, щоб відповісти на питання практичного використання наведених вище результатів, вкажемо на необхідність переосмислення проведення експериментів в аеродинамічних трубах. Хоча основна складова підйомної сили, пов'язана з пере напрямленням повітряного потоку крилом, залишається незмінною, в умовах аеродинамічної труби не вдається отримати структуру безградієнтного примежового шару, таку ж, як в умовах польоту. Тому в якості рекомендації ми пропонуємо переосмислити саму технологію експерименту і подумати, як створити рух дослідного зразка в лабораторних умовах і тим самим максимально наблизити експеримент до реального польоту.

В якості подальшого дослідження можна розглянути варіації зміни прискорення при розгоні літака та її вплив на характеристики встановленого руху.

### РОЗДІЛ 3. ОБЛАСТЬ РОЗВИТКУ ТЕЧІЇ В ПРИМЕЖОВОМУ ШАРІ: ДВОКОМПОНЕНТНА МОЛЕКУЛЯРНА В'ЯЗКІСТЬ ТА ЧАСТКОВЕ КОВЗАННЯ

В даному розділі використовуються суто теоретичні методи, що базуються на використанні варіаційного числення, законів фізики та уявлень із повсякденного життя. Результати аналізуються шляхом порівняння з наявними теоретичними та експериментальними даними та відповідністю до фундаментальних законів фізики, зокрема закону збереження енергії. Ці методи базуються на побудові аналітичних математичних моделей, що представляють собою диференціальні рівняння в частинних похідних, доповнених відповідними фізичними початковими та граничними умовами. Крім того, використовуються диференціальні рівняння Ейлера теорії екстремуму функціонала (в даній роботі це екстремум втрати рідини поперек перерізу примежового шару). При розв'язуванні цих рівнянь використовується відомий метод розділення змінних Фур'є. Довільні функції часу, що виникають при частинному інтегруванні (за однією зі змінних – просторовою координатою), визначаються з умов асимптотичної прямування розв'язків нестационарних задач до відповідних до них розв'язків стаціонарних задач.

#### **Формулювання задачі.**

Розглянемо півплощину  $x \in (-\infty; 0]$ , що рухається із деякою сталою швидкістю у додатному напрямку осі абсцис (див. рис. 3.1). У кожному наступному мить ця площа залучає до руху частинки рідини, що перед цим знаходилися у спокої. Задача полягає у тому, аби *визначити, за допомогою аналітичних методів, компоненти швидкості та молекулярної в'язкості в області розвитку нестисливої ламінарної течії рідини в примежовому шарі при русі півнескінченної площини в нерухомій рідині.*

#### **3.1. Розширення існуючої моделі в'язкої ламінарної течії рідини в області встановлення в примежовому шарі.**



Відповідно до існуючої теорії, такий рух має описуватися рівняннями Нав'є-Стокса. Для нашої задачі отримуємо

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (3.3)$$

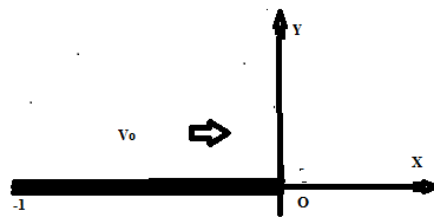


Рис. 3.1. Рух пів площини зі сталою швидкістю у рідині, що знаходиться у спокої на нескінченості.

Для нестисливої ламінарної течії молекулярна в'язкість є константою  $\mu$ , таким чином, виходить, що для двох невідомих функцій складових швидкості у нас є три рівняння. Тобто, з математичної точки зору, задача є перевизначеною. Що ж не було враховано? Єдино можливим подоланням цієї невідповідності є відхід від концепції сталої в'язкості в ламінарній нестисливій течії рідини, що просто означає:

$$\mu \neq \text{Const}. \quad (3.4)$$

З урахуванням співвідношення (3.4), рівняння (3.1)-(3.2) набувають вигляду:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial V_y}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right). \quad (3.6)$$

Система рівнянь (3.3), (3.5), (3.6) тепер вже є цілком визначеною: трьом невідомим функціям відповідають три різні рівняння. Здавалося – всі негаразди позаду. Але ні - головна інтрига цього розділу все ще попереду. Для розв'язання задачі диференціальні рівняння повинні доповнюватись початковими та граничними умовами. Оскільки вперше про змінну природу молекулярної в'язкості всередині ламінарного примежового шару нестисливої течії зазначено на підставі стаціонарної течії [73], то далі обмежимося стаціонарною течією і замість (3.5)-(3.6) будемо розглядати

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right), \quad (3.7)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial V_y}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right). \quad (3.8)$$

Система рівнянь (3.3), (3.7), (3.8) виписана в розмірному вигляді. Не знаючи наперед просторові масштаби області встановлення течії, не зручно формулювати граничні умови. Тому, вважаючи анізотропію просторових масштабів

$$\delta = \frac{l_y}{l_x} \ll 1,$$

розглянемо безрозмірний аналог рівнянь (3.3), (3.7), (3.8). Цим аналогом є така система

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \delta^2 \left( \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \quad (3.9)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \delta^2 \left( \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial V_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (3.11)$$

Тепер, після переходу до безрозмірних величин, область розвитку течії має вигляд квадрату  $[x] \times [y] = [-1; 0] \times [0; 1]$ .

У подальшому будемо нехтувати доданками другого порядку малості – тими, що містять  $\delta^2$ . У такому разі (3.9)-(3.10) набувають більш простого вигляду:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \quad (3.12)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial V_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}. \quad (3.13)$$

Основною граничною умовою моделі в'язкої течії є умова прилипання рідини до поверхні твердого тіла. Ця умова постулює: швидкість частинок рідини, що торкаються поверхні твердого тіла, мусить бути рівною швидкості тіла. Іншими словами, якщо тіло не рухається, то умовою прилипання буде рівність нулеві швидкості рідини на поверхні тіла; якщо ж тіло рухається в нерухомій рідині, то тепер швидкість рідини на поверхні твердого тіла мусить бути рівною швидкості тіла. Покажемо, що ця умова (прилипання) не виконується у області розвитку течії. Справді, з рівняння нерозривності (3.3 або 3.11) та умови прилипання випливає, що вздовж усієї області встановлення течії маємо

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (3.14)$$

Зі співвідношення (3.14) одразу випливає, що нормальна компонента швидкості в області примежового шару не змінюється поперек цього шару. Відомо, що це не так. Отже, ми дійшли ще одного протиріччя теорії Стокса – *неможливості дотриматися повною мірою умови відсутності ковзання на поверхні твердого тіла в області розвитку течії.*

Як же зрозуміти отримане протиріччя? Для цього звернемося до фізики як науки та життєвого досвіду. Ми добре знаємо, що другий закон Ньютона не дозволяє тілу миттєво набувати скінченної швидкості - для цього потрібна нескінченно велика сила. Чи відноситься сила тертя рідини об тверде тіло до розряду нескінченно великих? Очевидно, що ні. З життєвого досвіду ми знаємо, що при гальмуванні будь-якого транспортного засобу потрібен скінчений час, якому відповідає скінчений шлях – до повної зупинки руху. За аналогією, під час тертя рідини об тіло, миттєвого переходу від спокою рідини до скінченої (і не малої у разі авіаційно-космічної техніки) величині швидкості не може відбуватися в принципі. Єдиним можливим є поступове збільшення швидкості: під час тертя об поверхню, рідина прослизає цю поверхню, поступово набираючи швидкість і процес прискорення закінчується в кінці області встановлення. Отже, ми повинні замість умови прилипання задовольняти умові розгону рідини - збільшення її швидкості на поверхні твердого тіла від нуля (на початку області встановлення) до максимальної -- швидкості тіла (наприкінці області встановлення). Як це робити, тобто як, за якою формулою задавати закон зростання швидкості на поверхні тіла – поки що не відомо. Спробуємо вирішити цю проблему. Що стосується інших граничних умов в області встановлення течії, то вони очевидні: на зовнішній межі примежового шару асимптотичне спадання швидкості до нуля, а після проходження ділянки розгону (області встановлення течії) – асимптотичне зникнення нормальної компоненти швидкості скрізь

поперек примежового шару і рівність нулеві поздовжніх похідних для всіх величин: компонент швидкості та в'язкості.

Як зазначалося вище, спроби розв'язати задачу чисельно-аналітичними методами призвели до усвідомлення обговорюваної невідповідності граничної умови прилипання. Проте, розв'язання задачі виявилось можливим за допомогою аналітичних методів.

### **3.2. Застосування варіаційного числення для аналітичного розв'язання задачі про встановлення течії при стаціонарному русі пів-нескінченної площини в рідині, що покоїться.**

Як і в роботах [73,74], будемо вважати, що витрата течії рідини, яка викликаного тертям об поверхню тіла, що рухається, є екстремальною. Швидше за все, мінімальною: під час взаємодії із твердим тілом, рідина намагається якнайменше залучатися до руху. Це «якнайменше» і є мінімальна витрата. Витрата рідини визначається поздовжньою складовою швидкості та описується функціоналом:

$$J = \int_0^1 V_x \left( \frac{\partial V_x}{\partial x}, \frac{\partial V_x}{\partial y}, \frac{\partial V_y}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) dy . \quad (3.15)$$

Під інтегральний вираз (3.15) не випадково є функцією градієнтів компонент швидкості. Річ у тім, що рух рідини в задачі, що розглядається, повністю залежить від дотичних напружень, які, як відомо, визначаються градієнтами поля швидкості. Після застосування детально викладеної в [73] процедури, для поздовжньої компоненти швидкості отримуємо рівняння Ейлера варіаційного числення для необхідної умови екстремуму функціоналу (3.15). Це рівняння має такий вигляд:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) = 0 \quad (3.16)$$

Розв'язок рівняння (3.16) будимо шукати методом, викладеним в [9]. Суть цього методу полягає в тому, що асимптотичне прагнення течії, після проходження області встановлення, до вигляду, що відповідає руху нескінченної площини, дозволяє (3.16) розщепити на два рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) = 0. \quad (3.17)$$

Використовуючи інваріантність першого диференціала, перетворюємо (3.17) на вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{1}{\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{1}{\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}} \right) = 0. \quad (3.18)$$

До системи диференціальних рівнянь (3.18) можна застосувати метод розподілу змінних [74]. Відповідно до цього методу,

$$V_x = X_x(x)Y_x(y). \quad (3.19)$$

Підставивши (3.18) до (3.17), отримаємо:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dX_x}{dx} \frac{1}{\frac{d^2 X_x}{dx^2}} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{dY_x}{dy} \frac{1}{\frac{d^2 Y_x}{dy^2}} \right) = 0. \quad (3.20)$$

Загальний розв'язок системи (3.20) має такий вигляд

$$X_x(x) = A_x + B_x \exp\left(\frac{x}{C_{1x}}\right) \quad Y_x(x) = A_y + B_y \exp\left(y/C_{1y}\right) \quad (3.21)$$

Згідно із відомими даними про структуру поля швидкості у випадку нескінченної площини [73], а також необхідністю виходу течії на асимптотичний режим без ковзання, із (3.21) маємо:

$$V_x(x, y) = (1 - \exp(\alpha x)) \exp(-\alpha y), \text{ де } \alpha \approx 5. \quad (3.22)$$

Для другої, нормальної складової поля швидкості також повинна виконуватись необхідна умова екстремуму функціоналу. Вона виглядає таким чином

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{1}{\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{1}{\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}} \right) = 0. \quad (3.23)$$

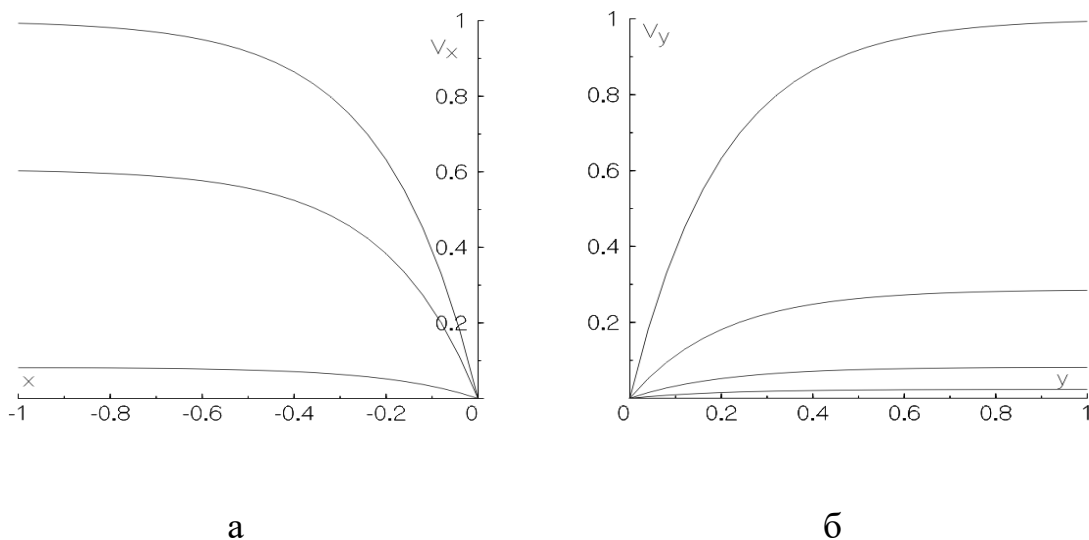


Рис. 3.2. Складові поля швидкості в області розвитку течії: а) – повздовжня складова за значень  $y=0; 0.25; 0.5$ ; б) – нормальна складова за значень  $x=0; 0.25; 0.5; 0.75$ .

Систему рівнянь (3.23) можна, теоретично, розв'язати аналітично. Але, як виявляється, простіше знайти  $V_y(x, y)$  з рівняння нерозривності і показати, що

отриманий таким шляхом розв'язок задовольняє (3.23). Зробимо це. Після підстановки (3.22) в (3.11), отримуємо

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = \alpha \exp(\alpha(x-y)). \quad (3.24)$$

Розв'язком (3.24) є

$$V_y = \exp(\alpha(x-y)) + F_1(x) \quad (3.25)$$

З урахуванням рівності нулеві нормальної складової швидкості, остаточно отримується

$$V_y = \exp(\alpha x)(1 - \exp(-\alpha y)). \quad (3.26)$$

Слід відзначити, що розв'язок (3.26) не прагне, для кожного фіксованого значення  $x$  в області розвитку течії, до нуля як це відбувається із повздовжньою складовою швидкості. І це не протирічить тому, що на межі примежового шару швидкість практично зникає: згадаємо, що нормальна складова швидкості у багато (сотні а то і більше) раз менша за повздовжню складову. Отже будь які вимірювання швидкості фактично будуть відповідати зникненню повздовжньої складової. Подібний результат отримав і Блазіус [39] для оберненої задачі. Там теж нормальна складова швидкості виходить на константу при зростанні  $y$ . Слід особливо зазначити, що вирази (3.22) та (3.26) задовольняють систему рівнянь (3.23), що підтверджує їх вірність: не тільки рівняння нерозривності, але і обидва необхідні умови екстремуму функціоналу витрати рідини задовольняються. Ці речі перевірено далі – в розділі 3.4.

Ми знову прийшли до «роздоріжжя»: маємо аналітичні розв'язки для двох складових швидкості і два, а не одне рівняння, де присутня молекулярна в'язкість. Перед тим, як почати визначення функції в'язкості, слід не забувати, що нам, перш за все, слід знайти такі два розв'язки, які на поверхні  $y=0$  співпадають. Другий важливий момент: рівняння збереження кількості руху для



$V_x$  і  $V_y$  не є рівноправними в примежовому шарі, оскільки наявна дуже сильна анізотропія масштабів, яка обумовлює той факт, що всі складові в другому рівнянні збереження кількості руху мають нехтовно малі значення у порівнянні із першим рівнянням. Тобто, не порушуючи припущення про однокомпонентність функції в'язкості, нам слід знаходити її із рівняння збереження кількості руху в горизонтальному (повздожньому) напрямку. Але, продовжуючи розширення існуючих уявлень, давайте відійдемо від догми про те, що молекулярна в'язкість є скалярною функцією і припустимо, що в області встановлення течії в'язкість має дві складові:  $\mu_x$  та  $\mu_y$  -- обидві функції двох координат. От тоді все стає на свої місця.

Як щойно було сказано, знайдемо дві різні функції – складові молекулярної в'язкості. Почнемо з  $\mu_x$ . Для визначення цієї функції нам будуть потрібні ще такі вирази:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = -\alpha(1 - \exp(\alpha x))\exp(-\alpha y), \quad \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \alpha^2(1 - \exp(\alpha x))\exp(-\alpha y). \quad (3.27)$$

Після підстановки виразів (3.27) та решти у перше рівняння (3.12), отримуємо:

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial y} - \alpha \mu_x = \exp(\alpha x). \quad (3.28)$$

Загальний розв'язок (3.28) і є шукана  $x$ -складова молекулярної в'язкості:

$$\mu_x(x, y) = (-\exp(\alpha(x - y)) / \alpha + F_1(x))\exp(\alpha y). \quad (3.29)$$

Аналогічним чином знаходимо

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} = -\alpha^2 \exp(\alpha x)\exp(-\alpha y).$$

І підставляємо всі потрібні доданки вирази в рівняння (3.13). Отримуємо

$$\frac{\partial \mu_y}{\partial y} - \alpha \mu_y = 1 - \exp(-\alpha y). \quad (3.30)$$

Розв'язком (3.30) є така  $y$ -складова молекулярної в'язкості:

$$\mu_y(x, y) = \exp(\alpha y) F_2(x) + \frac{\exp(-\alpha y) - 2}{2\alpha}. \quad (3.31)$$

Розв'язки (3.29) і (3.31) не можуть співпадати в усіх точках області встановлення течії. Але ми можемо вимагати, аби вони співпадали на поверхні площини, отже

$$\mu_x(x, y=0) = \mu_y(x, y=0). \quad (3.32)$$

Співвідношення (3.32) дає єдиний вираз для двох складових молекулярної в'язкості:

$$\mu_x(x, y=0) = \mu_y(x, y=0) = \mu_0(x) = 1 - \exp(\alpha x) / \alpha. \quad (3.33)$$

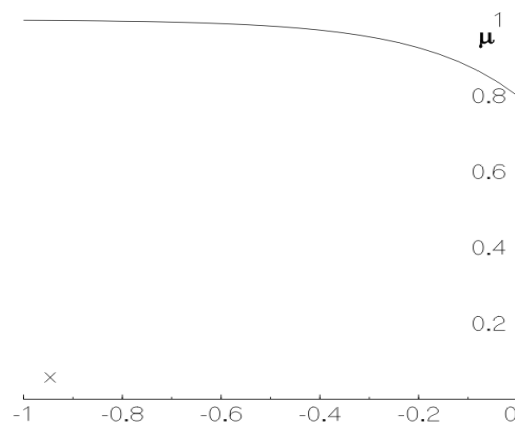


Рис. 3.3. Функція молекулярної в'язкості на поверхні площини, що рухається.

Вираз (3.33) дає нам змогу зробити цілком фізичний висновок: оскільки  $\alpha > 1$ , то на початку області розгону рідини (або встановлення течії) молекулярна в'язкість має значення менше за те, що відповідає встановленій течії і рівне, у безрозмірних величинах, одиниці. На рис. 3.3 представлено графік

цієї функції. Видно, що при значенні  $\alpha=5$  маємо, що на початку області встановлення течії в'язкість десь на 20% менша за встановлене значення.

Важливою характеристикою течії є дотичне напруження

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \approx \mu \frac{\partial V_x}{\partial y}.$$

На поверхні рухомої площини маємо:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = - (\alpha - \exp(\alpha(x-y)))(1 - \exp(\alpha x)). \quad (3.34)$$

Отже, основна складова в'язких дотичних напружень залежить від обох координат. І, вочевидь, після проходження зони встановлення течії за рахунок тертя, дотичні напруження є сталими: навіть наявність вертикальної координати вже на це не впливає. Це повністю узгоджується із результатами попередніх досліджень про нескінчену площину [73]. На рис. 3.4 представлено графік (3.33), на якому чітко просліджується вихід функції максимальних дотичних напружень (на поверхні рухомої площини) на стале значення. Для порівняння, в теорії Блазіуса [39], так як Стокса із Релеєм [107, 93], дотичне напруження спадає обернено пропорційно квадратному кореню із повздовжньої координати. Отже, тертя є все меншим в меншим. При русі півплощини в нерухомій рідині напруження тертя навпаки, як ми вже побачили, зростає вздовж потоку, а потім виходить на стале значення. І це є логічним.

На завершення, наведемо вираз для потужності сили тертя, що діє на поверхні площини. Він має такий вигляд

$$P = \tau_{xy} V_x = - (1 - \exp(\alpha(x-y)) / \alpha) (1 - \exp(\alpha x))^2 \exp(-\alpha y). \quad (3.35)$$

Графік модуля максимальних значень (на поверхні рухомого тіла) потужності (3.35) представлено на рис. 3.5. Як і всі наведені раніше величини, потужність виходить на асимптоту – стале значення. На відміну від розв'язків

[107, 93], що отримуються на підставі сталості молекулярної в'язкості (у випадку нескінченної площини) де потужність прямує до нуля у часі.

## Обговорення

Якщо ретельно вивчити даний розділ, що стане очевидно, що запропонована модель не є ідеальною. Так, вертикальна складова швидкості, хоча і отримується із відповідних рівнянь, але не ідеально узгоджується із тим, що зовні примежового шару повинний бути відсутній будь який рух. А отриманого розв'язок виходить на асимптоту – сталі значення. Цього не слід боятися, бо вертикальна складова у  $\delta$  разів менша за повздовжню. Оскільки  $\delta$  є дуже малою величиною (менше за 0.01), то зрозуміло, що виміри швидкості на зовнішній межі примежового шару просто будуть свідчити про малі її значення. Але з іншого боку в теорії примежового шару, і отже в цьому розділі, вертикальна складова швидкості не відіграє якоїсь важливої ролі. Отже, слід сприймати отримані результати як певне наближення до точного розв'язку. Щодо двокомпонентної функції молекулярної в'язкості, то тут теж, вочевидь не все ідеально. Можна було просто ігнорувати друге рівняння збереження кількості руху, як це зробив Блазіус, і тоді в'язкість була би однозначною функцією координат. Але більш глибокі міркування привели нас до думки про те, що нам нічого не заважає у примежовому шарі, де порушується умова анізотропії, вважати що в'язкість може залежить не тільки від координат, але і від напрямку. Тому було вирішено залишити друге рівняння збереження кількості руху, але вважати що в ньому функція в'язкості не є повністю такою, як у першому рівнянні. Звичайно, при цьому ми не забули про той факт, щоби обидві функції в'язкості співпадали на поверхні тіла, де і відбуваються основні події – тертя твердої поверхні і рідини, що призводить до генерації примежового шару і двох компонент швидкості в області розвитку течії.

В наступному розділі (див. також [75]), з посиланням на відомі джерела, стверджувалося, що скрізь на поверхні твердого тіла повинна виконуватись

умова прилипання, бо течія ж в'язка. Також піддався критиці відомий метод дискретних вихорів, в якому фактично на поверхню крила зноситься поле швидкості [1,4]. Тепер стало зрозумілим, чому саме цей метод мав певний успіх – із-за наявного ковзання рідини по поверхні твердого тіла в області встановлення течії.

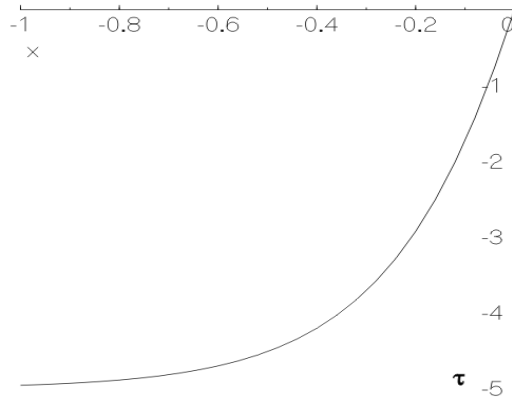


Рис.3.4. Максимальні дотичні напруження: (3.34),  $y=0$ .

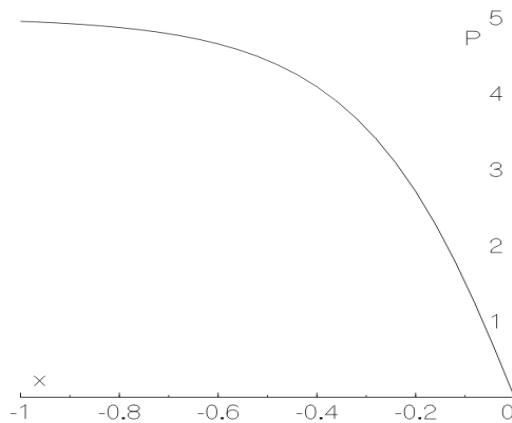


Рис. 3.5. Максимальна потужність тертя: (3.35),  $y=0$ .

**3.3. Застосування гібридного чисельного методу для опису течії в області її розвитку .**

#### **Математичне формулювання задачі.**

Система рівнянь (3.9)—(3.11) є замкненою: за відсутності функції тиску (без градієнтний примежовий шар) маємо три шукані функції,  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $\mu$ , і три

рівняння. Для знаходження розв'язку задачі потрібно додати ще граничні і початкові (у випадку нестационарної течії) умови. Оскільки лише перші похідні за часом присутні для компонент швидкості, то у якості початковими умов для них можна задати їх початкові розподіли. Так як ми не будемо розв'язувати нестационарну задачу, то обмежимося формулюванням граничних умов.

- значення молекулярної в'язкості на поверхні рухомої площини:

$$\mu_x(x, y=0) = \mu_y(x, y=0) = \mu_0(x) = 1 - \exp(\alpha x) / \alpha \quad (3.36)$$

- значення повздовжньої компоненти швидкості на початку області розвитку течії:

$$V_x(x=0) = 0; \quad (3.37)$$

- значення поздовжньої компоненти швидкості наприкінці області встановлення течії;

$$V_x(x=-1) = 1 - \exp(-5) \approx 1; \quad (3.38)$$

-- ці граничні умови цілком фізичні: умови (3.37) і (3.38) впливають із умови часткового ковзання рідини по тілу, що рухається в ній.

Що стосується граничних умов для нормальної складової швидкості, то в даному разі досить формулювання однієї граничної умови за повздовжньою координатою

$$V_y(x=-1) = 0; \quad (3.39)$$

Можна було би обмежитися однією граничною умовою (3.39), але ми пам'ятаємо наявність, хоча і малих за значенням, других похідних за координатою  $x$ . Крім цього, застосування спектрального методу за цією координатою теж потребує формулювання другої граничної умови. Природньо, що нею є відсутність нормальної складової швидкості на початку області розвитку течії:

$$V_y(x=0) = 0. \quad (3.40)$$

Теж сама відсутність нормальної складової швидкості на поверхні твердого тіла дає наступну, гарно відому, граничну умову

$$V_y(y=0) = 0. \quad (3.41)$$

Щодо граничної умови зникнення нормальної компоненти швидкості на зовнішній межі примежового шару

$$V_y(y=1) = 0,$$

то її виконання не будемо вимагати. Це обумовлено тим, що аналітичний розв'язок (3.26) не наближається до нуля – як і розв'язок Блазіуса. Умова (3.41) є цілком фізичною: не протікання твердої стінки. А от умова рівності нулеві швидкості на зовнішній межі примежового шару виконується наближено – за рахунок прямування до нуля основної (повздовжньої) складової поля швидкості.

На початку цього розділу зазначалось, що першою думкою було використання чисельних методів. Якщо ми звернемось до джерел щодо розв'язання задачі, що розглядається, то не знайдемо прямого застосування рівнянь Нав'є-Стокса. Але модель із змінною функцією в'язкості, як зазначалося, є математично замкненою. Тож застосування стандартних (відомих) математичних методів є можливим у такому разі. Єдиною, але головною, деталлю є відхід від умови прилипання рідини до поверхні тіла, що рухається у нерухомій рідині. Цю умову, як зазначено вище, змінено на фізичну умову часткового ковзання.

Як було вище зауважено, доданки, що містять другі похідні за координатою  $x$ , потрібно пам'ятати і враховувати при виборі власних функцій у спектральному методі, який буде застосовано далі.

Саме систему рівнянь (3.11—3.13) з граничними умовами (3.36—3.41), що відповідають повним рівнянням будемо в подальшому розв'язувати. Щойно згаданий набір рівнянь і являє собою математичне формулювання задачі.

Оскільки намагання використати відомі підходи (функцію течії, наявні софти, що розв'язують аналітично або чисельно) зазнали невдач, то, після всього цього, виникла оригінальна ідея: замість того, аби розглядати нестационарну задачу на встановлення у часі нестационарної течії, було вирішено використати за повздовжньою координатою спектральний метод, а за поперечною координатою – метод Рунге-Кутти четвертого порядку точності чисельного розрахунку системи нелінійних рівнянь. Оскільки класична версія цього методу має справу із системою диференціальних рівнянь першого порядку, то і нам слід перетворити рівняння (3.11—3.13) на систему чотирьох диференціальних рівнянь першого порядку. Зробимо це. З цією метою введемо нові функції (позначення):

$$F_X = \frac{\partial V_x}{\partial y}, \quad (3.42)$$

$$F_Y = \frac{\partial V_y}{\partial x}. \quad (3.43)$$

З урахуванням (3.42), рівняння (3.12—3.13) перетворюються на таку систему рівнянь

$$\mu \frac{\partial F_X}{\partial y} = \left( V_y - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) F_X + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x};, \quad (3.44)$$

$$\mu \frac{\partial F_Y}{\partial x} = \left( V_x - \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) F_Y + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y}. \quad (3.45)$$

Рівняння нерозривності (3.11) можна, згідно із (3.43), переписати у вигляді

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + F_Y = 0. \quad (3.46)$$

Система п'яти рівнянь (3.42 -- 3.46) для п'яти невідомих  $V_x, V_y, F_X, F_Y, \mu$  є замкненою. Але ця система є ще незручною для розв'язання методом Рунге-Кутти: рівняння (3.46) стоїть на заваді цьому. Одним із можливих виходів є такий підхід: диференціюємо рівняння по  $y$  і підставляємо в рівняння (3.45)

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F_Y}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F_Y}{\partial y} = -\frac{\partial F_X}{\partial x}. \quad (3.47)$$

в рівняння (3.46). В свою чергу, де слід, замінюємо  $\partial \mu / \partial y$  на відповідний вираз. Отримується, замість (3.44—3.45) така система рівнянь:

$$F_Y \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial F_X}{\partial x} + V_y F_Y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \quad (3.48)$$



$$\mu F_Y \frac{\partial F_X}{\partial y} = -F_X \left( \mu \frac{\partial F_X}{\partial x} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + F_Y V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \quad (3.49)$$

Отже, для застосування методу Рунге-Кутти слід використовувати систему рівнянь: (3.42--3.43),(3.47—3.49). Ця система має стандартний вигляд, де в лівій частині містяться перші похідні шуканих функцій, а в правій частині – все решта.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & \mu & F_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial V_x / \partial y \\ \partial V_y / \partial y \\ \partial F_x / \partial y \\ \partial F_y / \partial y \\ \partial \mu / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ V_y F_x + V_x \partial V_x / \partial x \\ V_y F_y + V_x \partial V_y / \partial x \\ \mu \partial F_x / \partial y + V_y F_y + V_x \partial V_y / \partial x \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Зрозуміло, що розв'язувати систему (3.50) слід відносно трьох останніх невідомих, бо перші два рівняння є просто пере-визначення перших похідних. У такому разі, маємо систему з трьох рівнянь із трьома невідомими. Визначник цієї системи дорівнює:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu & 0 & F_x \\ 0 & \mu & F_y \\ 0 & 0 & F_y \end{vmatrix} = \mu(\mu F_y + 0 \cdot F_y) = \mu^2 F_y \quad (3.51)$$

Умовою існування єдиного розв'язку системи рівнянь (3.50) є

$$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow (\mu \neq 0) F_y \neq 0. \quad (3.52)$$

Саме умова (3.52) не виконується на поверхні рухомого тіла (пів-площини) в області розвитку течії, що впливає із (3.46).

Як вже неважко здогадатися, розв'язок шукаємо за методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} V_y F_x + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} & 0 & F_x \\ V_y F_y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} & \mu & F_y \\ \mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + V_y F_y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} & 0 & F_y \end{vmatrix} = F_y \cdot \mu \left( V_y F_x + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) - \quad (3.52)$$

$$-F_x \cdot \mu \left( \mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + V_y F_y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) = F_y \cdot \mu \cdot V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} - F_x \cdot \mu \left( \mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mu & V_y F_x + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} & F_x \\ 0 & V_y F_y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} & F_y \\ 0 & \mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + V_y F_y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} & F_y \end{vmatrix} = F_y \cdot \mu \left( V_y F_y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) -$$

$$-F_y \left( \mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + V_y F_y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) = -\mu^2 \cdot F_y \cdot \frac{\partial F_x}{\partial x} \quad (3.53)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mu & 0 & V_y F_x + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \\ 0 & \mu & V_y F_y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \\ 0 & 0 & \mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + V_y F_y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \end{vmatrix} = \mu^2 \left( \mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + V_y F_y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \quad (3.54)$$

Використовуючи формули Крамера , маємо:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{F_y V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} - F_x \left( \mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)}{\mu F_y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial y} = -\frac{\partial F_x}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + F_y V_y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x}}{F_y}. \quad (3.55)$$

До першого та третього рівнянь (3.55) застосовувати безпосередньо спектральний метод незручно. Тому перепишемо їх у зручному вигляді:

$$\mu F_y \frac{\partial F_x}{\partial y} = F_y V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} - F_x \left( \mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \right), \quad (3.56)$$

$$F_y \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + F_y V_y + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x}. \quad (3.57)$$

### Застосування спектрального методу.

Аби безпосередньо застосувати до (3.50) спектральний метод, слід ще зробити деякі зміни, які диктують автоматичне узгодження із граничними умовами. Нагадаємо, що розрахункова область, у безрозмірних величинах, має вигляд квадрату:  $[x] \times [y] = [-1; 0] \times [0; 1]$ . Для уникнення труднощів із представленням шуканих функцій рядами, представимо молекулярну в'язкість як :

$$\mu = \mu + \mu_0 \quad \mu = \bar{\mu} + 1$$

-відповідно у розмірних та безрозмірних величинах. Згідно із зазначеним, маємо:

$$\bar{V}_X(x, y) = \sum_{n=1}^N V_X(y, n) \sin \left[ \frac{\pi(2n+1)}{2} x \right]; \quad (3.58)$$

$$\bar{V}_Y(x, y) = \sum_{n=1}^N V_Y(y, n) \sin[\pi n x]; \quad (3.59)$$

$$F_X(x, y) = \sum_{n=1}^N F_X(y, n) \sin \left[ \frac{\pi(2n+1)}{2} x \right]; \quad (3.60)$$

$$F_Y(x, y) = \sum_{n=1}^N F_Y(y, n) \cos \left[ \pi \left( \frac{2n+1}{2} \right) x \right]; \quad (3.61)$$

$$\bar{\mu}(x, y) = \sum_{n=1}^N AMU(y, n) \cos \left[ \pi \left( \frac{2n+1}{2} \right) x \right] \quad (3.62)$$

Тепер підставляємо вирази (3.58)—(3.62) в систему рівнянь (3.55—3.57).

Перші два рівняння системи перетворюються на такі:

$$\sum_{n=1}^N \frac{dVX(y,n)}{dy} \sin\left[\frac{\pi(2n+1)}{2}x\right] = \sum_{n=1}^N FX(y,n) \sin\left[\frac{\pi(2n+1)}{2}x\right]$$

або ж 
$$\frac{dVX(y,n)}{dy} = FX(y,n). \quad (3.63)$$

Аналогічно для  $V_y$

$$\sum_{n=1}^N \frac{dVY(y,n)}{dy} \sin[\pi nx] = \sum_{n=1}^N FY(y,n) \sin[\pi nx]$$

$$\frac{dVY(y,n)}{dy} = FY(y,n) \quad (3.64)$$

Для  $F_Y$  маємо, згідно із (3.55), також просте рівняння:

$$\sum_{n=1}^N \frac{dFY(y,n)}{dy} \sin[\pi nx] = \sum_{n=0}^N FX(y,n) \frac{\pi(2n+1)}{2} \cos\left[\frac{\pi(2n+1)}{2}x\right]. \quad (3.65)$$

Наступні два рівняння системи є нелінійними. Аби не заплутатися, будемо німий індекс сумування для функції у лівій частині позначати  $k$ . Рівняння (3.56) (для молекулярної в'язкості) має перетворюється на такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N FY(y,k) \cos\left[\frac{\pi(2k+1)}{2}x\right] \cdot \sum_{m=0}^N \frac{dAMU(y,m)}{dy} \cos\left[\frac{\pi(2m+1)}{2}x\right] = \\ & = \sum_{k=1}^N \left( AMU(y,k) \sin\left[\frac{\pi(2k+1)}{2}x\right] + 1 \right) \sum_{m=0}^N FX(y,m) \frac{\pi(2m+1)}{2} \cos\left[\frac{\pi(2m+1)}{2}x\right] + \\ & \quad + \sum_{k=1}^N VY(y,k) \sin[\pi kx] \cdot \sum_{m=1}^N FY(y,m) \cos\left[\pi\left(\frac{2m+1}{2}\right)x\right] + \\ & \quad + \sum_{k=0}^N VX(y,k) \sin\left[\frac{\pi(2k+1)}{2}x\right] \cdot \sum_{m=1}^N VY(y,m) \pi m \cos[\pi mx]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Нарешті, найскладніше рівняння, що містить третій порядок нелінійності, це рівняння (3.56). Його аналог має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
& \left[ \sum_{j=0}^N AMU(y, j) \cos \left[ \frac{\pi(2j+1)}{2} x \right] + 1 \right] \sum_{m=1}^N FY(y, m) \cos \left[ \frac{\pi(2m+1)}{2} x \right] \times \\
& \times \sum_{k=0}^N \frac{dFX(y, k)}{dy} \sin \left[ \frac{\pi(2k+1)}{2} x \right] = - \sum_{j=0}^N FX(y, j) \sin \left[ \frac{\pi(2j+1)}{2} x \right] \cdot \\
& \left\{ \sum_{m=0}^N \left( AMU(y, m) \cos \left[ \frac{\pi(2m+1)}{2} x \right] + 1 \right) \cdot \sum_{k=0}^N FX(y, k) \frac{\pi(2k+1)}{2} \cos \left[ \frac{\pi(2k+1)}{2} x \right] + \right. \\
& + \sum_{m=0}^N VX(y, m) \sin \left[ \frac{\pi(2m+1)}{2} x \right] \cdot \sum_{k=1}^N VY(y, k) \pi k \cos [\pi k x] \left. \right\} + \\
& + \sum_{j=0}^N VX(y, j) \sin \left[ \frac{\pi(2j+1)}{2} x \right] \cdot \sum_{m=0}^N FY(y, m) \cos \left[ \frac{\pi(2m+1)}{2} x \right] \cdot \\
& \cdot \sum_{k=0}^N VX(y, k) \frac{\pi(2k+1)}{2} \cos \left[ \frac{\pi(2k+1)}{2} x \right] \cdot \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Аби перейти до безпосереднього чисельного інтегрування наведених вище рівнянь, виконаємо перетворення. Помножимо рівняння (3.67) на  $\sin[\pi(2k+1)/2x]$  і проінтегруємо по області течії  $x \in [-1; 0]$ . В результаті маємо наступне рівняння:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{k=0}^N (AMU(y, j)CCSS1(j, m, k) + CSS1(m, k))FY(y, m) \frac{dFX(y, k)}{dy} = \\
& \left[ AMU(y, j)FX(y, m) \frac{\pi(2m+1)}{2} SCCS2(j, m, k) + VX(y, j)(\pi m)VY(y, m)SCCS2(j, m, k) \right] \\
& \times FX(y, k) \\
& + \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^N \sum_{k=0}^N FY(y, j)(VX(y, m) - 1)VX(y, k)SSCS(j, m, k). \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Рівняння для молекулярної в'язкості (3.66) перетворюється на таке:

$$\left[ \sum_{m=1}^N FY(y,m)CCS1(m,k) \right] \frac{dAMU(y,k)}{dy} = \sum_{m=0}^N FX(y,m) \frac{\pi(2m+1)}{2} \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=0}^N AMU(y,k)CCS1(m,k) + CS1(m) \right] \quad (3.69)$$

$$\sum_{k=0}^N VX(y,k) \left[ \sum_{m=1}^N VY(y,m) \pi m SCS1(m,k) \right] + \sum_{k=0}^N VY(y,k) \left[ \sum_{m=1}^N FY(y,m) SCS2(m,k) \right]$$

Рівняння (3.65) набуває такого вигляду:

$$\frac{dFY(y,n)}{dy} = 2 \sum_{m=0}^N FY(y,m) \frac{\pi(2m+1)}{2} SC(m,n). \quad (3.70)$$

В рівняннях (3.68—3.70) використані такі позначення:

$$CCSS1(j,m,k) = 2 \int_{-1}^0 \cos \pi(j+0,5)x \cos \pi(m+0,5)x \sin^2 \pi(k+0,5)x dx =$$

$$= \varphi_2(j,k,m) + \varphi_3(j,k,m) + \varphi_4(j,k,m).$$

Явний вигляд цих функцій такий:

$$\varphi_2(j,k,m) = \begin{cases} 0.125, & j=2k-m; \\ 0, & j \neq 2k-m. \end{cases} \quad \varphi_3(j,k,m) = \begin{cases} 0.125, & j=2k+m+1; \\ 0, & j \neq 2k+m+1. \end{cases}$$

$$\varphi_4(j,k,m) = \begin{cases} 0.125, & j=m-2k-1; \\ 0, & j \neq m-2k-1. \end{cases}$$

$$SCCS1(j,m,k) = 2 \int_{-1}^0 \sin \pi(j+0,5)x \cos \pi(m+0,5)x \sin^2 \pi(j+0,5)x dx =$$

$$= \psi_1(j,k,m) + \psi_2(j,k,m) + \psi_3(j,k,m),$$

$$\psi_1(j,k,m) = \begin{cases} -0.125, & j = -2k+m-1; \\ 0, & j \neq -2k+m-1. \end{cases} \quad \psi_2(j,k,m) = \begin{cases} -0.125, & j = 2k+m+1; \\ 0, & j \neq 2k+m+1. \end{cases}$$

$$\psi_3(j,k,m) = \begin{cases} -0.125, & j = -2k+m-1; \\ 0, & j \neq -2k+m-1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} SSCS(j,m,k) &= 2 \int_{-1}^0 \sin[\pi(j+0,5)x] \sin[\pi(m+0,5)x] \pi k \cos \pi k \sin[\pi(j+0,5)x] dx = \\ &= \frac{k}{4(2j-2m-1)} - \frac{k}{4(2j-2m+1)} - \frac{k}{4(2j+2m+1)} + \frac{k}{4(2j+2m+3)} + \\ &+ \frac{k}{4(2j-4k-2m-1)} - \frac{k}{4(2j+4k-2m+1)} - \frac{k}{4(2j-4k+2m+1)} + \frac{k}{4(2j+4k+2m+3)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CSS1(m,k) &= 2 \int_{-1}^0 \cos[\pi(m+0,5)x] \sin^2[\pi(k+0,5)x] dx = \\ &= \frac{(-1)^m}{\pi(2m+1)} + \frac{(-1)^m}{\pi(4k+2m+3)} + \frac{(-1)^{m+1}}{2\pi(4k-2m+1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SCS(m,k) &= 2 \int_{-1}^0 \sin[\pi(m+0,5)x] \cos[\pi(k+0,5)x] \sin[\pi(k+0,5)x] dx = \\ &= (k+1/2) \left( \frac{(-1)^{j+1}}{2(2j-4k-1)} + \frac{(-1)^{j+1}}{2(2j+4k+3)} \right). \end{aligned}$$

$$CCS1(m,k) = 2 \int_{-1}^0 \cos[\pi(m+0,5)x] \cos[\pi(k+0,5)x] \sin[\pi(k+0,5)x] dx = 0.,$$

$$SCS1(m,k) = 2 \int_{-1}^0 \cos[\pi(m+0,5)x] \sin[\pi kx] \sin[\pi(k+0,5)x] dx = \varphi(k,m),$$

$$\varphi(k, m) = \begin{cases} 0, & k \neq 2m; \\ -0.25, & k = 2m. \end{cases}$$

$$SCS2(m, k) = 2 \int_{-1}^0 \sin[\pi(k+0,5)x] \pi m \sin[\pi m x] \sin[\pi(k+0,5)x] dx = \pi m \cdot \varphi(k, m),$$

$$\varphi(k, m) = \begin{cases} 0, & m \neq 2k+1; \\ -0.25, & m = 2k+1. \end{cases}$$

$$CS(m, k) = \pi(2m+1) \int_{-1}^0 \cos \pi(m+0,5)x \sin \pi(k+0,5)x dx = -\frac{2m+1}{2(2k+1)},$$

### 3.4. Нестационарний примежовий шар в області розвитку течії при оптимальному (мінімальний вплив тертя) розгоні півплощини.

Нестационарний рух також, разом із стаціонарним, відіграє важливу роль в польоті літака. Це розгін та гальмування, маневрування та інша кінематика.

На відміну від стаціонарного руху, що розглянуто вище в цьому розділі, тепер всі невідомі функції залежать від часу, зокрема:

$$V_x = V_x(x, y, t), \quad V_y = V_y(x, y, t). \quad (3.71)$$

Замість рівняння Ейлера (3.16) та його аналога для нормальної складової швидкості маємо більш загальні рівняння:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_x} \right) = 0, \quad (3.72)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial V_y} \right) = 0. \quad (3.73)$$



або, в придатному для інтегрування вигляді

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\frac{\partial V_x}{\partial t}}{\frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{\partial V_x}{\partial x}}{\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\frac{\partial V_x}{\partial y}}{\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}} \right) = 0, \quad (3.74)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\frac{\partial V_x}{\partial t}}{\frac{\partial^2 V_y}{\partial t^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{\partial V_x}{\partial x}}{\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\frac{\partial V_x}{\partial y}}{\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}} \right) = 0. \quad (3.75)$$

Оскільки розглядається задача встановлення течії, то із умов граничних переходів до більш простих течій, -- стаціонарної для площини та стаціонарної для півплощини, -- (3.74) та (3.75) розщеплюються на відповідні системи рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\frac{\partial V_x}{\partial t}}{\frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{\partial V_x}{\partial x}}{\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\frac{\partial V_x}{\partial y}}{\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}} \right) = 0, \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\frac{\partial V_x}{\partial t}}{\frac{\partial^2 V_y}{\partial t^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{\partial V_x}{\partial x}}{\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\frac{\partial V_x}{\partial y}}{\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}} \right) = 0. \quad (3.77)$$

Рівняння (3.77) неможна розв'язати одразу, бо в них дві функції. Тож почнемо із (3.76). Застосуємо той самий метод:

$$V_x = T_x(t)X_x(x)Y_x(y). \quad (3.78)$$

Підставимо тепер (3.78) в (3.76). Отримуємо:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\frac{dT_x}{dt}}{d^2 T_x} \right) = 0, \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\frac{dX_x}{dx}}{d^2 X_x} \right) = 0, \quad \frac{d}{dy} \left( \frac{\frac{dY_x}{dy}}{d^2 Y_x} \right) = 0. \quad (3.79)$$

Розв'язки кожного з рівнянь нам вже відомі. Для подальшого нам слід:

1. Знайти, за відомим  $V_x$ , вираз для  $V_y$ .
2. Перевірити виконання необхідних умов екстремуму функціоналу – систему рівнянь (3.77).
3. Підставити вирази для швидкостей та їх частинних похідних у відповідні узагальнені рівняння Нав'є-Стокса та отримати з цих рівнянь загальні вирази для двох складових молекулярної в'язкості --  $\mu_x(x, y, t)$  та  $\mu_y(x, y, t)$ .
4. Виконати умову рівності складових в'язкості на поверхні півплощини

$$\mu_x(x, y=0, t) = \mu_y(x, y=0, t).$$

Зважаючи на розв'язанність більш простих задач, що є складовими даної, подовжня складова швидкості має такий вигляд:

$$V_x = (1 - \exp(-\alpha t))(1 - \exp(\alpha x))\exp(-\alpha y). \quad (3.80)$$

Нормальну складову поля швидкості отримуємо підстановкою (3.80) в (3.11) та виконанням умови рівності нулеві цієї складової на поверхні. Отже, маємо:

$$V_y = (1 - \exp(-\alpha t))\exp(\alpha x)(1 - \exp(-\alpha y)). \quad (3.81)$$

Оскільки (3.81) отримано не із рівнянь Ейлера, слід перевірити їх обов'язкове виконання. Замість (3.74) або (3.77), доцільно використати

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\frac{dT_x}{dt}}{d^2 T_y} \right) = 0, \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\frac{dX_x}{dx}}{d^2 X_y} \right) = 0, \quad \frac{d}{dy} \left( \frac{\frac{dY_x}{dy}}{d^2 Y_y} \right) = 0. \quad (3.82)$$

Підстановка (3.80) та (3.81) в (3.82) призводить до

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha \exp(-\alpha t)}{-\alpha^2 \exp(-\alpha t)} \right) = 0, \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{-\alpha \exp(\alpha x)}{\alpha^2 \exp(\alpha x)} \right) = 0, \quad \frac{d}{dy} \left( \frac{-\alpha \exp(-\alpha y)}{-\alpha^2 \exp(-\alpha y)} \right) = 0. \quad (3.83)$$

Ясна річ, що рівняння (3.83) усі як одне виконуються – адже у дужках залишається лише вираз від  $\alpha$ . Отже, перевірено важливу умову – необхідну умову екстремуму функціоналу для нормальної складової поля швидкості.

Тепер визначимо функції  $\mu_x$  та  $\mu_y$  – складові молекулярної в'язкості, кожену із свого рівняння. Почнемо із  $\mu_x$ . Її знаходимо із відповідного рівняння (яке ще не наводилося в наданому вигляді):

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}. \quad (3.84)$$

Для отримання рівняння відносно  $\mu_x$  знаходимо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \alpha \exp(-\alpha t) (1 - \exp(\alpha x)) \exp(-\alpha y), \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = (1 - \exp(-\alpha t)) (-\alpha \exp(\alpha x)) \exp(-\alpha y), \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = (1 - \exp(-\alpha t)) (1 - \exp(\alpha x)) (-\alpha) \exp(-\alpha y), \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = (1 - \exp(-\alpha t))(1 - \exp(\alpha x))(\alpha^2) \exp(-\alpha y). \quad (3.88)$$

Підставимо (3.80), (3.81), (3.85)-(3.88) у рівняння (3.84). Маємо:

$$\begin{aligned} & \alpha \exp(-\alpha t)(1 - \exp(\alpha x)) \exp(-\alpha y) + (1 - \exp(-\alpha t))(1 - \exp(\alpha x)) \exp(-\alpha y) \times \\ & \times (1 - \exp(-\alpha t))(-\alpha \exp(\alpha x)) \exp(-\alpha y) + (1 - \exp(-\alpha t)) \exp(\alpha x)(1 - \exp(-\alpha y)) \times \\ & \times (1 - \exp(-\alpha t))(1 - \alpha \exp(\alpha x))(-\alpha) \exp(-\alpha y) = \frac{\partial \mu}{\partial y} (1 - \exp(-\alpha t))(1 - \alpha \exp(\alpha x))(-\alpha) \exp(-\alpha y) \\ & + \mu (1 - \exp(-\alpha t))(1 - \alpha \exp(\alpha x))(\alpha^2) \exp(-\alpha y). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Після спрощень, рівняння (3.89) набуває такого вигляду:

$$(1 - \exp(-\alpha t)) \left[ \frac{\partial \mu}{\partial y} - \alpha \mu \right] = \exp(-\alpha t) - \exp(\alpha x)(1 - \exp(-\alpha t))^2. \quad (3.90)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.90) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_x(x, y, t)}{\exp(\alpha y)} &= \frac{\exp(-\alpha(t+y)) - \exp(\alpha(x-y))}{\alpha(-1 + \exp(-\alpha t))} + \\ &+ \frac{-\exp(-\alpha(2t-x+y)) + 2\exp(-\alpha(t-x+y))}{\alpha(-1 + \exp(-\alpha t))} + F_1(x, t). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Аналогічно, проводимо процедуру для  $\mu_y$ . Для цього розглянемо друге рівняння збереження кількості руху

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}. \quad (3.92)$$

Знаходимо необхідні частинні похідні:

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} = \alpha \exp(-\alpha t) \exp(\alpha x)(1 - \exp(-\alpha y)), \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} = (1 - \exp(-\alpha t)) \alpha \exp(\alpha x) (1 - \exp(-\alpha y)), \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} = (1 - \exp(-\alpha t)) \exp(\alpha x) \alpha \exp(-\alpha y), \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} = (1 - \exp(-\alpha t)) \exp(\alpha x) (-\alpha^2) \exp(-\alpha y) \quad (3.96)$$

Підставимо (3.93)--(3.96) в (3.92). Отримуємо таке рівняння:

$$\begin{aligned} & \alpha \exp(-\alpha t) \exp(\alpha x) (1 - \exp(-\alpha y)) + (1 - \exp(-\alpha t)) (1 - \exp(\alpha x)) \exp(-\alpha y) \times \\ & \times (1 - \exp(-\alpha t)) (\alpha \exp(\alpha x)) (1 - \exp(-\alpha y)) + (1 - \exp(-\alpha t)) \exp(\alpha x) (1 - \exp(-\alpha y)) \times \\ & \times (1 - \exp(-\alpha t)) \exp(\alpha x) (\alpha) \exp(-\alpha y) = \frac{\partial \mu}{\partial y} (1 - \exp(-\alpha t)) \exp(\alpha x) (\alpha) \exp(-\alpha y) + \\ & + \mu (1 - \exp(-\alpha t)) \exp(\alpha x) (-\alpha^2) \exp(-\alpha y). \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} & \exp(-\alpha y) (1 - \exp(-\alpha t)) \left[ \frac{\partial \mu_y}{\partial y} - \alpha \mu_y \right] = (1 - \exp(-\alpha y)) \times \\ & \times \left( \exp(-\alpha t) + (1 - \exp(-\alpha t))^2 \exp(-\alpha y) (1 + \exp(\alpha x)) \right). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Загальний розв'язок (3.98) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \mu_y(x, y, t) = & (-2 \exp(-\alpha t) \cdot y \cdot \alpha + 2 \exp(-\alpha y) - \exp(-2\alpha(t + y)) - \\ & - \exp(-\alpha(2t - x + 2y)) + 2 \exp(-\alpha(t - x + 2y)) + 2 \exp(-\alpha(2t - x + y)) + 2 \exp(-\alpha(t + 2y)) - \\ & - 2 \exp(\alpha(t - 2y)) + 2 \exp(-\alpha(2t + y)) - 4 \exp(-\alpha(t - x + y)) + 2 \exp(\alpha(x - y)) - \\ & - 6 \exp(-\alpha(t + y)) - \exp(-2\alpha y)) \exp(\alpha y) + \exp(\alpha y) F_2(x, t). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Порівняння виразів (3.91) і (3.99) є дуже складною процедурою. Отже, ми обмежимося лише їх приведенням – для більшої повноти викладення результатів.

### 3.5 . Вплив часткового ковзання на розподіл поверхневого тиску в області розвитку слабо стисливої течії рідини в примежовому шарі

У сучасній авіації швидкості літаків і вертольотів перевищують межу 0,2-0,3 Ма. років, і течія рідини (повітря), що викликана тертям між поверхнею літака і повітрям, слід вважати стисливою. Покажемо, що, як і у випадку нестисливої течії [77,103], для слабо стисливої течії всі висновки залишаються справедливими. Отже, розглянемо нескінченну пів-площину, що рухається з постійною швидкістю, спрямованою вздовж площини цієї пластини [77,103]. В області розвитку течії формується примежовий шар, в якому виділяють дві складові швидкості: поздовжню і поперечну. При цьому важливо, щоб наприкінці області розвитку течії (в безрозмірних координатах, див. [77,103])

$$V_y \rightarrow 0, x \rightarrow -1.$$

Оскільки відкриття явища часткового ковзання [77,108] базується на використанні рівняння неперервності (збереження маси), то розглянемо це рівняння і для випадку стисливої рідини. Маємо [108]:

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} = 0,$$

або у розгорнутому вигляді [103]

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} V_x + \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} V_y + \rho \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (3.100)$$

В (3.100)  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $\rho$  позначено відповідно поздовжню та поперечну компоненти швидкості та густину.

Припустимо, як і всі, що частинки рідини (в даному випадку повітря) миттєво прилипають до поверхні рухомої півплощини (або тіла). Тоді для всіх точок півплощини виконується так звана умова прилипання [103]

$$V_{x|y=0} = \text{Const} = V_0, \quad V_{y|y=0} = 0. \quad (3.101)$$

З умови (3.101) безпосередньо випливає [98]:

$$\left. \frac{\partial V_x}{\partial x} \right|_{y=0} = 0. \quad (3.102)$$

Рівняння (3.100) на поверхні півплощини спрощується до [98]:

$$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial x} V_x + \rho \frac{\partial V_y}{\partial y} \right]_{y=0} = 0. \quad (3.103)$$

З умови (3.101) також випливає умова сталості тиску на поверхню півплощини [103]:

$$p_{|y=0} = \text{Const}. \quad (3.104)$$

Як наслідок, сталість густини випливає зі співвідношення (3.104) .

$$\rho_{|y=0} = \text{Const}. \quad (3.105)$$

Виявляється, рівняння нерозривності на поверхні півплощини еквівалентне такому

$$\left[ \rho \frac{\partial V_y}{\partial y} \right]_{y=0} = 0. \quad (3.106)$$

Через скінченне значення густини виявляється, що (3.106) еквівалентне

$$\left. \frac{\partial V_y}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (3.107)$$

Із співвідношень (3.101) і (3.107), а також на основі моделі в'язкої течії Стокса, яка не допускає формулювання граничної умови

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \neq 0,$$

приходимо до однозначного висновку :

$$V_y \equiv 0. \quad (3.108)$$

Знак тотожності замість рівності в (3.108) означає, що нормальна складова швидкості, згідно з теорією Стокса, скрізь може дорівнювати лише нулю. Очевидно, що тотожність (108) не виконується в області розвитку течії. І якщо так, то можна зробити висновок, що в області розвитку течії :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} \Big|_{y=0} \neq 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=0} \neq 0. \Rightarrow V_x = V_x(x), \quad \rho = \rho(x), \quad V_y = 0, \quad \frac{\partial V_y}{\partial y} \neq 0; \quad 1 \leq x \leq 0. \quad (3.109)$$

Дозвольте, скажуть опоненти, а як бути з задачею обтікання рідиною поверхні пів-нескінченної нерухомої пластини? Що там не виконується умова прилипання? Справа в тому, що в початкові моменти часу, коли створюється течія (включається аеродинамічна труба), область розвитку потоку має скінчений розмір. Але при досягненні стаціонарного режиму (протягом сотих часток секунди) область розвитку течії зменшується і, в нарешті, стискається до точки на півплощині. А перед початком півплощини утворюється застійна зона. Нічого подібного з фізичної точки зору не відбувається з тілом, що рухається в нерухомій рідині: в кожен наступний момент часу все нові і нові частинки рідини залучаються в рух і прискорюються зі стану спокою до скінченої швидкості (досить великої) в частки секунди. Миттєвого прискорення бути не може, тому що нескінченно великої сили взяти не звідки.

Стан дослідження задачі. До недавнього часу вважалося, що в примежовому шарі течії нестисливої рідини молекулярна в'язкість є сталою



величиною, яка не залежить від просторових координат, а може бути лише функцією температури. Дослідження ламінарного примежового шару виявили цікаві особливості. Задача про рух нескінченної площини була розв'язана лише в припущенні просторової мінливості молекулярної дифузії рідини [73]. При цьому розподіли поздовжніх швидкостей у градієнтному та безградієнтному примежових шарах мають, як виявилось, зовсім різні функціональні залежності: у неградієнтному примежовому шарі – експоненціальне спадання до нуля [41], а в градієнтному примежовому шарі – відомий параболічний розподіл [39,90,61,88,91,101]. Стокс [108] і Релей [93] отримали розв'язок задачі про розгін площини з наступною постійною швидкістю руху, згідно з яким напруження тертя асимптотично зникає після розгону площини. Припущення про мінливість як у просторі, так і в часі молекулярної дифузії дозволили отримати фізичний розв'язок задачі, згідно з яким напруження тертя досягає своєї асимптотики відразу після припинення розгону [74]. Оскільки нескінченних тіл не існує, розглядалася так звана задача Блазіуса [76]. Як виявилось (і це було показано вище в даному розділі також для слабо стисливої течії рідини), в області розвитку течії неможливо точно виконати граничну умову прилипання, оскільки це еквівалентно в рамках рівнянь Нав'є-Стокса, відсутності другої складової швидкості. Замість умови прилипання в області розвитку течії необхідно використовувати умову часткового ковзання [76].

Формулювання задачі. Поширити поняття області розвитку течії на клас слабо стисливих течій, коли стисливістю течії вже не можна знехтувати, але ефекти, пов'язані з нагріванням через тертя рідини об тверду поверхню, ще незначні.

Мета. Метою даного розділу є отримання на основі аналітичного підходу оцінки поля поздовжньої складової швидкості біля поверхні рухомої півплощини. На основі цієї оцінки отримати асимптотичний розподіл поля тиску біля поверхні півплощини в області розвитку слабо стисливій течії та вказати

на важливість цього розподілу як для підйомної сили крила, так і для розрахунку напружень, що виникають на поверхні крила.

### Асимптотика поля швидкості у області розвитку слабостисливій течії в примежовому шарі.

Розглянемо плоску стисливу течію на поверхні нескінченної площини. Ця течія описується наступними безрозмірними рівняннями (формули (51) параграф 144 [14], [103] )

$$\rho V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{kM_\infty^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} = 0, \quad (3.111)$$

$$\rho V_x \frac{\partial h}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{k-1}{k} V_x \frac{\partial p}{\partial x} + (k-1) M_\infty^2 \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad (3.112)$$

$$P = \rho h, \quad (3.113)$$

$$\mu = f(h). \quad (3.114)$$

В системі рівнянь (3.110)-(3.114)  $p$ ,  $h$ ,  $\mu$  -- відповідно тиск, ентальпія і в'язкість;  $k$ ,  $\sigma$ ,  $M_\infty^2$  -- константи.

Як видно з (3.110)-(3.114), ця система рівнянь не є замкнутою: шести невідомим функціям відповідають лише п'ять рівнянь. Припускаючись помилки Блазіуса, який вважав течію навколо пластини неградієнтною, Дородніцин та ін. [49,103] також зробили помилку, відкинувши градієнт тиску в рівнянні збереження імпульсу в поздовжньому напрямку. Як може текти рідина, якщо площина нерухома, а градієнт тиску дорівнює нулю? Ніяк не може текти. Використовуючи досвід дослідження примежового шару в нестисливій течії [76], а також області її розвитку в примежовому шарі, виконаємо аналогічну процедуру для слабо стисливої течії.

Можна використати рівняння збереження імпульсу для функціоналу течії рідини крізь поперечний переріз [103]

$$J = \int_S V_x ds \rightarrow ext. \quad (3.115)$$

Підінтегральний вираз має вигляд [103]:

$$F = V_x = V_x \left( V_y, \rho, \frac{dp}{dx}, \frac{\partial V_x}{\partial x}, \frac{\partial V_x}{\partial y}, \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \mu, \frac{\partial \mu}{\partial y} \right). \quad (3.116)$$

Рівняння Ейлера, яке відповідає необхідній умові екстремуму функціонала (3.115) за умови (3.116) (це одна з умов: умов набагато більше, але нам достатньо однієї), має вигляд [103]:

$$\frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x}) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (F_{u_{yy}}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y}). \quad (3.117)$$

Слідом за роботами [74,76] подаємо [103]

$$F = V'_x = X(x) \cdot Y(y). \quad (3.118)$$

Підстановка (3.118) у (3.117) перетворює (3.117) на рівняння [103]

$$Y(y) \frac{d}{dx} \left( \frac{dX}{dx} \cdot \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^{-1} \right) = X(x) \frac{d}{dy} \left( \frac{dY}{dy} \cdot \left( \frac{d^3 Y}{dy^3} \right)^{-1} - \frac{dY}{dy} \cdot \left( \frac{d^2 Y}{dy^2} \right)^{-1} \right). \quad (3.119)$$

Після ділення рівняння (3.119) на праву частину рівняння (3.118) отримуємо [103]:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d}{dx} \left( \frac{dX}{dx} \cdot \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^{-1} \right) = \frac{1}{Y(y)} \frac{d}{dy} \left( \frac{dY}{dy} \cdot \left( \frac{d^3 Y}{dy^3} \right)^{-1} - \frac{dY}{dy} \cdot \left( \frac{d^2 Y}{dy^2} \right)^{-1} \right). \quad (3.120)$$

Рівняння (120) є диференціальним рівнянням з роздільними змінними. З асимптотичної умови, яка полягає в прагненні слабостисливої течії до нестисливої, на основі роботи [71] припустимо, що [98]

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d}{dx} \left( \frac{dX}{dx} \cdot \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^{-1} \right) = 0, \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d}{dy} \left( \frac{dY}{dy} \cdot \left( \frac{d^3 Y}{dy^3} \right)^{-1} - \frac{dY}{dy} \cdot \left( \frac{d^2 Y}{dy^2} \right)^{-1} \right) = 0. \quad (3.121)$$

Розв'язок першого рівняння (3.121) уже відомий [76], другий розв'язок ще належить знайти. Запишемо його в зручному для розв'язування вигляді

$$\frac{dY}{dy} \cdot \left( \frac{d^3 Y}{dy^3} \right)^{-1} - \frac{dY}{dy} \cdot \left( \frac{d^2 Y}{dy^2} \right)^{-1} = \text{Const}. \quad (3.122)$$

Довільна константа інтегрування може бути обрана різною, але, як показали дослідження,  $\text{Const} = 0$  цілком відповідає фізиці задачі. Таким чином, для  $\text{Const} = 0$  отримуємо асимптотику у вигляді [103]

$$Y(y) = Y(0) + D(Y)(0) \cdot y,$$

де 
$$Y(0) = Y(y=0), \quad D(Y) = \left. \frac{dY}{dy} \right|_{y=0}.$$

Оскільки значення безрозмірної швидкості на поверхні дорівнює одиниці, а безрозмірна перша похідна дорівнює -1, то отримуємо [103]:

$$Y(y) = 1 - y. \quad (3.123)$$

Отже, для підобласті, де з точністю до 1 % виявляється, що розподіл вертикальних швидкостей поблизу площини описується (3.123). Це повністю збігається з розв'язком для випадку течії нестисливої рідини [73], оскільки

$$\exp(-y) = 1 - y + \dots$$

Таким чином, отриманий раніше розв'язок для випадку нестисливої течії можна використовувати як асимптотику для стисливої течії – у безпосередній близькості (тобто при  $y' \leq 0.1$ ) до твердої стінки.

**Розподіл тиску на поверхні в області розвитку слабко стисливої течії в примежовому шарі.**

Розподіли складових швидкості в області розвитку течії мають такий вигляд [76, 103]:

$$V_x(x, y) = (1 - \exp(\alpha x)) \exp(-\alpha y), V_y = \exp(\alpha x) (1 - \exp(-\alpha y)). \quad (3.124)$$

Відповідно до формул (3.124), нехтуючи малою нормальною складовою швидкості, а також враховуючи масштаб поздовжньої швидкості, для поля тиску отримаємо [103]:

$$\frac{p(x, y)}{p_0} \approx 1 - \rho V_x^2(x, y) / (2p_0) = 1 - \rho V_0^2 (1 - \exp(\alpha x)) \exp(-2\alpha y) / (2p_0) \quad (3.125)$$

Розподіл поля тиску представлений на рис. 3.6. Як бачимо, поле тиску в області розвитку течії є неоднорідним. А при швидкості порядку 100 м/с відхилення тиску можуть бути такого ж порядку, як і атмосферний тиск, що впливає як на підйомну силу, так і на розподіл напружень на поверхні крила. Неоднорідність напружень призводить до появи додаткових деформацій, які, за умови часткої зміни швидкості польоту, можуть призводити до втомних напружень, прискорюючи зношування літака.

### **Висновки до розділу:**

Вдосконалена модель в'язкої н'ютонівської рідини в області розвитку течії в примежовому шарі. На підставі припущень про змінний характер молекулярної в'язкості, яка вже має дві складові, та відходу від виконання умови прилипання, отримані аналітичні розв'язки для обох складових швидкості, а також обох складових молекулярної в'язкості. Наведено порівняння отриманих результатів із результатами інших робіт.

Як показали дослідження, існують такі нестисливі течії рідини, де теорія Стокса, що постулює незалежність в'язкості від просторових координат та обов'язкове виконання умови прилипання на твердій поверхні, не спроможна адекватно їх описувати. Однією із таких течій є та, що генерується під час руху

пів-нескінченної площини у нерухомій рідині. Саме в області встановлення течії наявна ситуація, коли двом, за Стоксом, невідомим функціям (складовим швидкості) відповідають три рівняння: два збереження кількості руху і третє – збереження маси. Така ситуація спонукає шукати вихід із отриманої невідповідності. І такий вихід, звичайно, є: вважати молекулярну в'язкість функцією координат, а не константою. Якщо для нескінченної площини, де відсутня область розвитку течії, цього кроку вже достатньо (див. [73,74]), то за наявності області розвитку течії слід зробити ще один важливий крок – вважати, що умова повного прилипання на поверхні твердого тіла в області розвитку течії не виконується. Натомість має місце часткове ковзання – від повного на початку області генерації течії до повного прилипання наприкінці цієї області і далі вниз за течією. Як і в попередніх роботах [73,74], не обійшлося без використання методів оптимізації, які базуються на знаходженні екстремуму функціоналу витрати рідини в примежовому шару. Саме можливості варіаційного числення сприяли знаходженню полів складових швидкості та молекулярної в'язкості. Як і прийнято вважати, дотичні (основні) напруження, що відповідають нормальній похідній від повздовжньої складової швидкості, є сталими після проходження області розвитку течії у будь-якому перерізі примежового шару. Також, разом із потужністю сили тертя, дотичні напруження виходять на асимптотичне стає значення наприкінці області розвитку течії, що є логічним.

Представлені результати мають принципове значення для розуміння фізики обтікання частин літака, оскільки вказують на суперечливість існуючого уявлення про оборотність прямої та оберненої задач: руху тіла в нерухомій рідині та обтікання рідиною нерухомого тіла.

У даному розділі розглянуто ряд задач, де пряме використання рівнянь Нав'є-Стокса без-градиентного ламінарного несжимаемого течії рідини, у якому молекулярна дифузія належить постійної величиною, яка залежить від просторових координат, призводить до перевизначення математичної моделі. Мається на увазі примежовий шар рідини в області встановлення течії в задачі

про стаціонарний рух напів-нескінченної площини, де градієнт тиску дорівнює нулю. Виходить ситуація, коли кількість рівнянь дорівнює трьом (два рівняння збереження кількості руху та рівняння нерозривності), а кількість невідомих дорівнює двом – числу компонент швидкості. Як логічне подолання зазначеної невідповідності, запропоновано, як це вже було зроблено для задачі про стаціонарний рух площини і задачі про розгін площини, відійти від хибного твердження про сталість молекулярної в'язкості в без-градієнтному примежовому шарі нестисливої течії рідини і вважати молекулярну в'язкість такою, що залежить від відстані до твердої поверхні тіла, що рухається (площини в даній статті). Необхідність в урахуванні змінного характеру молекулярної в'язкості призвела до відкриття ще одного, другого, недоліку в теорії Нав'є-Стокса для опису примежового шару течії. Цей нетривіальний недолік виявився в ході застосування оригінального чисельно-аналітичного методу вирішення задачі про течію рідини в області встановлення руху. Рівняння Нав'є-Стокса доповнюються граничними умовами. Найважливішим із них є умова прилипання (не прослизання) рідини лежить на поверхні твердого тіла. В результаті, на поверхні пів-площини, що рухається (або тіла) компонента швидкості, що збігається з напрямком руху, має постійне значення, рівне швидкості тіла. З рівняння нерозривності відразу випливає, що нормальна похідна від нормальної компоненти швидкості повинна дорівнювати нулю вздовж поверхні площини (тіла), тому що там поздовжня похідна від поздовжньої компоненти швидкості обертається в нуль. Однак, цілком очевидно, що нормальна до поверхні площини (тіла) компонента швидкості змінюється впоперек примежового шару – в області розвитку течії, що означає наявність нормального градієнта ( обох компонентів) швидкості. Конфлікт чи невідповідність долається шляхом відходу від загальновизнаної умови прилипання до умови часткового прилипання або, по суті, наявності ковзання. Також як і при різкому гальмуванні будь-якого транспортного засобу повна зупинка відбувається не миттєво, а через кінцеві значення часу та пройденого

шляху, то і у разі руху тіла в нерухомій рідині відбувається не миттєве виконання умови прилипання, а поступове – від повного прослизання, коли частка рідини тільки зустрілася з площиною, що рухається, до повного прилипання в кінці області розвитку течії. Отримано аналітичні розв'язки для обох компонентів швидкості та молекулярної в'язкості в галузі розвитку нестисливої течії в прикордонному шарі. Наведено порівняння отриманими раніше результатами авторів даної роботи, а також іншими результатами.

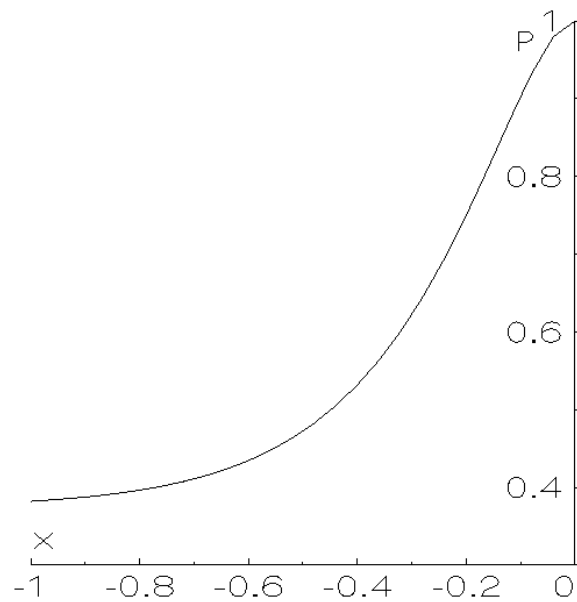


Рис.3.6. Безрозмірний розподіл тиску за формулою (3.125), для швидкості  $v_0 = 100$  м/с [103].

Як з'ясувалося в ході теоретичного аналізу, умова прилипання до поверхні тіла, що рухається в нерухомій рідині, також не є фізичною в області розвитку течії слабо стисливої рідини в примежовому шарі. Таким чином, з'явилася ідея розширити нову концепцію часткового ковзання також на швидкості, за яких повітря вже є злегка стисловою рідиною (80-200 м/с). На основі використання аналітичного методу, який полягає у застосуванні варіаційного числення, встановлено, що для слабо стисливої течії також можна описати область її розвитку в безпосередній близькості до поверхні твердого тіла, за попередньо отриманими функціональними залежностями для нестисливої течії. Це дозволяє



розширити поняття часткового ковзання в області розвитку течії на діапазон швидкостей понад 100 м/с. І головне, для цієї течії слід враховувати просторовий розподіл тиску в області розвитку течії в примежовому шарі.

У якості майбутніх досліджень доцільно отримати асимптотику високого порядку для області розвитку течії, що злегка стискається, у примежовому шарі.

## РОЗДІЛ 4. РОЗВИТОК КОМПАКТНИХ АНАЛОГІВ МОДЕЛЕЙ ВИХРОВИХ ТЕЧІЙ, ЩО ВИНΙΚАЮТЬ ПІД ЧАС ПОЛЬОТУ ЛІТАКА

Всі методи досліджень в даному розділі є суто теоретичними. Використовуються відомі теореми теоретичної механіки, математичної теорії поля, варіаційне числення тощо. Отримані розв'язки порівнюються із існуючими відповідними аналогами не компактних течій.

### **Формулювання задачі.**

Описати, за допомогою моделей компактних вихорів, що відповідають в'язкій течії рідини: рух у вихровій пелені, вільній супутній вихровій течії, що описується вихором Бюргерса-Ротта, а також вихрову доріжку фон Кармана, що також описується моделями нев'язких вихорів (за винятком [36]). Під час розв'язання задачі, крім використання вже відомих моделей, отримати нові моделі компактних вихрових течій, що генеруються під час польоту літака.

### **4.1. Два серйозні нерозуміння в моделях вихрових течій.**

*Нерозуміння 1. Вважається, що якщо вихрова течія описується рівнянням або системою рівнянь, де молекулярна в'язкість відсутня у явному вигляді, то така течія є нев'язкою. При цьому інтуїтивно в'язкість розглядається однозначно як джерело нестационарності течії, що призводить до дифузії завихрення.*

Це нерозуміння дуже серйозне – не тривіальне. З формально математичної точки зору, коли у розв'язку не присутня в'язкість, ми стверджуємо: відсутній механізм дифузії вихору і така вихрова течія є нев'язкою. Але мало хто зміг здогадатися, що такий стан відповідає стаціонарній течії в'язкої рідини за круговими орбітами. Бетчелор показав [35], що сила в'язкості в рідині може перебувати в самобалансі. Як! – вигукне кожен. Адже баланс означає наявність двох і більше сил. На те він і є балансом – щоб прирівнювати одну силу іншій. Проте баланс однієї сили можливий. Зважаючи на виняткову важливість для

розуміння фізики явища, покажемо, слідом за Бетчелором, як цей баланс відбувається.

Однією з основних теорем теоретичної механіки є теорема про зміну кінетичного моменту тіла при його обертанні. Нехай  $\vec{L}$  і  $\vec{M}_O$  -- відповідно кінетичний момент і момент зовнішніх сил, прикладених до тіла:

$$\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{V}, \quad \vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{R}^e).$$

Тоді теорема про зміну кінетичного моменту описується такою рівністю [6]:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{R}^e). \quad (4.1)$$

Якщо ми тепер уявимо рух рідких частинок по круговим траєкторіям (вздовж осі обертання область нескінченна), то внутрішнє тертя в рідині описується єдиною складовою тензора в'язких напружень

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right). \quad (4.2)$$

Момент зовнішніх сил, прикладених до нескінченно тонкої кільцевої області дорівнює [35]

$$M_z = 2\pi\mu r^2 \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right). \quad (4.3)$$

У той же час кінетичний момент визначається за формулою [35]

$$L_z = 2\pi r \rho \cdot r \cdot V_\theta \quad (4.4)$$

Підставляючи (4.3) та (4.4) у (4.1), отримуємо

$$\frac{\partial(2\pi r^2 V_\theta)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2\pi \mu r^2 \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right) \right\}, \quad (4.5)$$

або, після обчислення похідних у правій та лівій частинах (4.5), отримуємо добре відоме рівняння Нав'є-Стокса у формі Громеки-Лемба [35,11].

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} \right). \quad (4.6)$$

З (4.1) і (4.6) випливає довгоочікуваний висновок: при стаціонарному в'язкому русі рідких частинок по круговим орбітам головний вектор зовнішніх сил, прикладених до рідких циліндричних поверхонь, дорівнює нулю. Це стає можливим завдяки самобалансу в'язкого тертя в рідині. І аж ніяк не відноситься до відсутності сили в'язкості. Помилка всіх, хто вважає цю течію нев'язкою, пояснюється стаціонарним аналогом (4.6), який має вигляд

$$0 = \left( \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} \right). \quad (4.7)$$

Так, дійсно, у (4.7) немає в'язкості – у явному вигляді. Але воно відповідає ні чому іншому, як в'язкому само балансу. Ось чому фундаментальний розв'язок (4.7) у вигляді

$$V_\theta = C_1 r + C_2 r^{-1} \quad (4.8)$$

широко використовується у вихровій динаміці. Щоб закрити вже питання про в'язкість, покажемо, що моделі точкового вихору та вихору Ренкіна відповідають в'язким течіям. Дійсно, розподіл поля швидкості в точковому вихорі описується виразом [8]

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (4.9)$$

Підставимо (4.9) у (4.2). Отримаємо, що

$$\sigma_{r\theta} = \mu \frac{\Gamma}{2\pi} \left( -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) = -\mu \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \neq 0. \quad (4.10)$$

Таким чином, у всій своїй області течії точковий вихор має відмінні від нуля в'язки напруження. Оскільки вихор Ренкіна, що складається з ядра  $0 \leq r \leq a$  та периферії  $r \geq a$ , має розподіл швидкості у вигляді

$$V_{\theta} = \begin{cases} \frac{V r}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{V a}{r}, & r \geq a. \end{cases}, \quad (4.11)$$

то вся периферійна область, згідно з (4.10) є в'язкою течією.

**Нерозуміння 2.** Друге нерозуміння присутнє також всюди. Це ототожнення компактності поля завихрення з компактністю поля швидкості, тобто самої вихрової течії. В результаті, практично всі моделі вихрових течій, маючи компактне поле ротора швидкості, мають одну і ту ж неприродну властивість: вони охоплюють своїм обертанням нескінченну область простору і мають нескінченну кінетичну енергію. Очевидно, що зародження вихору протягом скінченного часу за рахунок скінченної потужності (нестійкості) аж ніяк не здатне створити об'єкт із нескінченною кінетичною енергією.

Покажемо, що кінетична енергія в точковому вихорі, а разом у будь-якому іншому, в якому поле швидкості прагне асимптотично до такого розподілу, дорівнює нескінченності. Справді, згідно з визначенням кінетичної енергії та виразом (4.9), маємо:

$$E_k = \rho 2\pi \frac{1}{2} \int_a^r \left( \frac{\Gamma}{2\pi r} \right)^2 r dr, \quad E_k = \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln r \Big|_a^r \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.12)$$

Що ж роблять майже всі. Вони забувають множити на якобіан  $r$  при переході до циліндричної (або полярної) системи координат. І замість (4.12) отримують

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_a^\infty \left( \frac{\Gamma}{2\pi r} \right)^2 dr = -\frac{\rho}{2} \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r} \Big|_a^\infty = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{a}. \quad (4.13)$$

Виходить згідно із (4.13), що кінетична енергія периферії будь-якого вихору, що має асимптотичку точкового вихору, має скінчене значення. На жаль, і чому довелося так докладно зупинитися на цьому питанні, в даний час вихор Ренкіна і точковий вихор вважаються нев'язкими течіями [36] зі скінченною кінетичною енергією.

#### 4.2. Вихрова пелена та її моделювання.

При моделюванні вихрової пелени як системи диполів вважається, що течія нев'язка. Насправді, кожен із точкових вихорів (4.9) задовольняє стаціонарному рівнянню Нав'є-Стокса у вигляді Громеки-Лемба (4.7). Оскільки в рамках моделі сталої молекулярної в'язкості (4.7) є лінійним, то вважається, що суперпозиція цих розв'язків буде також розв'язком (4.7).

Правильному розумінню фізики явища, що вивчається, нам постійно заважає помилка про повну оборотність прямої і зворотної задач. Якщо нерухоме тіло (крило) обтікається потоком в'язкої (реальної) рідини (повітрям), то поблизу кожної точки поверхні тіла швидкість рідини, взагалі кажучи, різна через наявність області встановлення течії. Значення цієї швидкості, разом з урахуванням напрямку, моделюється парою елементарних вихорів [1]. А вихрову пелену розглядають (моделюють) як сингулярне поле завихрення, здатне генерувати скінчений за величиною стрибок вектору швидкості. Нагадаємо, що поле швидкості всередині примежових градієнтного та без градієнтного шарів описуються різними функціями, тобто вони різні [73]. І головне - при русі тіла в рідині (політ) молекулярна в'язкість усередині без

градієнтного примежового шару є змінною. Оскільки для використання сучасних систем проектування та розрахунку важливе якомога точніше визначення «початкових умов», то структура вихрової пелени на етапі свого утворення має важливе значення. З цього приводу слід зазначити роботи [58,59], де, зокрема, вказано на три типи вихрових структур, що формуються в турбулентних течіях: ядро вихору Бюргерса ( периферія не описується цим вихрем), структури, схожі на викривлений вихровий шар та плоску вихрову пелену.

Спробуємо відповісти, виходячи з наявної інформації, на основне питання: як, яким чином утворюється вихрова пелена? Виходитимемо з того, що утворення (зародження) вихрової пелени відбувається в примежовому шарі. Оскільки, як зазначалося, будь-яка вихрова течія є зсувною, то наявність примежового шару сприяє утворенню вихорів. Фізична природа утворення вихорів – це нестійкість Кельвіна-Гельмгольца. Можна навести найпростішу аналогію з теоретичною механікою. Якщо зовнішню межу без-градієнтного примежового шару (пряма задача ) ототожнити із землею, а швидкість поверхні тіла, що рухається – зі швидкістю колеса у верхній точці (подвійна швидкість переміщення колісного транспортного засобу), то отримаємо, що в вихор, подібно колесу, котиться по зовнішньої нерухомої (приблизно) межі примежового шару. Слід зазначити, що це уявлення, по суті, схоже на гіпотезу Мільйонщикова [24], який для оберненої задачі (течія рідини вздовж нерухомої поверхні) припустив, що турбулентні вихори ніби котяться поверхнею тіла. Така гіпотеза дозволила Мільйонщикову отримати добре відомий логарифмічний закон стінки для турбулентної течії. Оскільки поступальна швидкість колеса вдвічі менша за максимальну (щодо миттєвого центру обертання – точки зіткнення колеса із землею), то за аналогією, вихори, що утворилися в вихровій пелені, сходять з тіла (крила) зі скінченою швидкістю (можливо рівною половині швидкості руху тіла).

Оскільки відкриття різної структури градієнтного і без градієнтного примежових шарів нестисливих течій рідини [73] засноване на варіаційних

принципах механіки, то логічно використовувати їх і тут - для опису природи утворення вихрової пелени. Щоб правильно вибрати належний функціонал, пригадаємо, що ще сам Прандтль вказував на турбулентну природу вихрової пелени [91]. Ми зараз обґрунтуємо його твердження на підставі варіаційного числення. Опускаючи подробиці, відзначимо, що вихрова природа течії у примежовому шарі вимагає від нас розглядати вже не екстремум витрати рідини крізь переріз примежового шару [73], а екстремум (максимум) ротора вектору швидкості

$$J = \int_{\Omega} \text{rot} \vec{V} d\Omega \rightarrow \text{extr}. \quad (4.14)$$

Цей екстремум, взагалі кажучи, умовний, тому що ми повинні додати до (4.14) відповідне рівняння Нав'є-Стокса для  $V_{\theta}$  і врахувати змінну природу  $\mu(r)$

. Оскільки ми розглядаємо

$$\vec{V} = (V_r = 0, V_{\theta}(r), V_z = 0), \quad (4.15)$$

то, згідно із (4.15), єдиною складовою ротору швидкості є

$$\text{rot}_z \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{\theta}). \quad (4.16)$$

Умова (4.14), згідно з (4.16), набуває явного вигляду

$$J = \int_0^{\delta/2} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{\theta}) r dr \rightarrow \text{extr}. \quad (4.17)$$

Якщо ми розглянемо звичайний екстремум (4.17), то відповідне рівняння Ейлера перетворюється на тотожність. Тож розглянемо умовний екстремум. Відповідна функція Лагранжа має вигляд:

$$\Phi = V_{\theta} + r \frac{dV_{\theta}}{dr} + \lambda \left[ \left( \frac{d\mu}{dr} + \frac{2\mu}{r} \right) \left( \frac{dV_{\theta}}{dr} - \frac{V_{\theta}}{r} \right) \right] + \lambda \mu \left( \frac{d^2 V_{\theta}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dV_{\theta}}{dr} + \frac{V_{\theta}}{r} \right). \quad (4.18)$$



Оскільки  $\Phi$  містить дві невідомі функції, то у нашому розпорядженні з'являються ще два додаткові рівняння Ейлера-Лагранжа (варіаційного числення). Ними є

$$\begin{cases} 1 + \lambda \left( -\frac{1}{r} \left( \frac{d\mu}{dr} + \frac{2\mu}{r} \right) \right) - \frac{d}{dr} \left( r + \lambda \left( \frac{d\mu}{dr} + \frac{2\mu}{r} \right) \right) + \frac{d^2}{dr^2} \lambda \mu = 0, \\ \left( \frac{dV_\theta}{dr} - \frac{V_\theta}{r} \right) \left( \frac{2\lambda}{r} - \frac{d\lambda}{dr} \right) = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

З другого рівняння системи (4.19) виходить, що множник Лагранжа має вигляд:

$$\lambda = C \cdot r^2. \quad (4.20)$$

Легко перевірити, що підстановка (4.20) в перше рівняння системи (4.19) перетворює його на тотожність. З наведеного можна зробити такий висновок: в рамках моделі змінної молекулярної в'язкості всередині примежового шару вихровий рух (4.15) автоматично доставляє умовний екстремум функціоналу завихрення (4.17). Отже, який би розподіл швидкості в рамках (4.15) ми не задавали заздалегідь, він буде відповідати необхідним умовам умовного екстремуму для функціоналу завихрення. Цей висновок нам відкриває можливість використовувати різні моделі в'язких стаціонарних вихрових течій – розв'язків рівняння (4.19). З іншого боку, ми так і не змогли точно визначити, який розподіл швидкості є природним для вихрової пелени, що формується у примежовому шарі. Стандартний прийом – це ускладнення моделі. Давайте перейдемо від рівнянь Нав'є-Стокса зі змінною молекулярною в'язкістю до відповідних рівнянь Рейнольдса (турбулентного руху рідини) :

$$0 = \left( \frac{d\mu}{dr} + \frac{2\mu}{r} \right) \left( \frac{d\bar{V}_\theta}{dr} - \frac{\bar{V}_\theta}{r} \right) + \mu \left( \frac{d^2\bar{V}_\theta}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\bar{V}_\theta}{dr} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \right) + \frac{d}{dr} \left( A_\theta \frac{d\bar{V}_\theta}{dr} \right) + \frac{2}{r} \frac{d\bar{V}_\theta}{dr} \quad (4.21)$$

Після проведення аналогічних процедур знаходження умовного екстремуму, ми також отримаємо вираз (4.20) та додатково ще рівняння

$$-Cr^2 \frac{d^2 \bar{V}_\theta}{dr^2} = 0, \quad (4.22)$$

розв'язком якого є

$$\bar{V}_\theta = C_1 r + C_2. \quad (4.23)$$

Отже, розглянувши загальний випадок турбулентного руху, ми отримали в результаті, що площина, що рухається, може генерувати квазітвердотільний обертальний рух (формула (4.23)). Це означає, що при переході до нестійкої (турбулентної) форми руху, примежовий шар може перетворюватися на систему вихорів, центри яких рухаються (вниз за потоком) зі швидкістю, що дорівнює половині від максимальної швидкості, щодо твердої поверхні. При цьому не забуваємо, що молекулярна в'язкість і турбулентна - функції відстані до поверхні тіла. Далі відбувається відрив вихрової пелени від поверхні і вихрова течія стає компенсованою – інтеграл від завихрення по всій області вихору є рівним нулеві. Це є необхідна та достатня умова того, що вихор є ізольованим – займає скінчену область простору. Цей процес називають «shedding» від англійського *shedding* [89,38]: навколо основної області завихрення одного знаку формується периферійна область завихрення протилежного знаку. Саме ця, периферійна область, і дозволяє вихору мати скінчений розмір – у будь який момент часу після відриву. Вплив відстані до межі на нестійкість Кельвін-Гельмгольца досліджено в роботі [69].

### 4.3. Супутній вихор: модель Бюргерса-Ротта та її компактний аналог.

Після відриву вихрової пелени утворюється так званий супутній вихор. Цей вихор апроксимують моделлю вихору Бюргерса-Ротта [42,86]. Вихор

Бюргера-Ротта є точним розв'язком стаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса. Під цією моделлю розуміється таке поле швидкості

$$\begin{cases} V_r = -\alpha \cdot r, \\ V_z = 2 \cdot \alpha \cdot z, \\ V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \cdot g(r) \end{cases} \quad (4.24)$$

Якщо ми замість третього рівняння (4.24), тобто виразу для азимутальної швидкості, запишемо просто

$$V_\theta = V_\theta(r), \quad (4.25)$$

то, підставивши (4.25) і перші два рівняння (4.24) в наведену далі систему рівнянь Нав'є-Стокса (в циліндричних координатах)

$$\rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \bar{V}_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right),$$

$$\rho \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} - \frac{V_r V_\theta}{r^2} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right),$$

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(rV_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(rV_z) = 0, \quad (4.27)$$

отримаємо:

$$\alpha^2 r - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{d^2 V_\theta}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{\nu} r \right) \frac{dV_\theta}{dr} + \left( \frac{\alpha}{\nu} + \frac{1}{r^2} \right) V_\theta = 0, \quad 4\alpha^2 z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4.28)$$

Розв'язком рівняння (4.28) буде саме вихор Бюргерса

$$V_\theta = \frac{1}{r} \left( C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{1}{2} \Lambda r^2\right) \right). \quad (4.29)$$

В (4.29)

$$\Lambda = \frac{\alpha}{\nu}. \quad (4.30)$$

Параметр  $\Lambda$  вказує на фізику процесу - баланс між в'язкістю і адвекцією в радіальному напрямку. Поле завихрення в такому вихорі компактне за Сефменом [97]

$$\omega_z = -\Lambda \cdot C_2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \Lambda r^2\right) \quad (4.31)$$

Однак поле швидкості – ні. Згідно із (4.12), кінетична енергія у вихорі Бюргерса-Ротта дорівнює нескінченності, що суперечить закону збереження енергії. Для подолання цієї проблеми (невідповідності закону збереження енергії) перетворимо (4.29) на компактний вихор. Нами була здійснена спроба використати замість третього співвідношення (4.25) вигляд заснований на квазіточковому (компактному) вихорі [16]

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_V} \right)^2 \right] g(r).$$

У наведеній формулі  $R_V$  -- радіус вихору.

У результаті однаково отримується розв'язок (4.29). То як же вчинити, щоб вирішити вказану проблему? Відповідь полягає в тому, що для цього нам потрібно відійти від звичних уявлень про те, що не лише швидкість, а й її похідна

мають бути неперервними функціями. На наше щастя, саме про це йшлося під час обговорення питання про моделювання вихрової пелени: там поле завихрення має розриви. Річ у тім, що з фізичної точки зору рівняння (4.7) виконується не тільки для розподілів швидкості, заданих однією функцією, але і для будь-якої скінченої кількості шматково-неперервних розподілів, побудованих на підставі (4.29). Іншими словами, як і складовий вихор Ренкіна (4.11), ми можемо розглядати вихор Бюргерса-Ротта також як складовий, поле азимутальної компоненти швидкості в якому задається співвідношеннями:

$$V_{\theta} = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r^2\right) \right), & 0 \leq r \leq r_k; \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( C_3 + C_4 \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r^2\right) \right), & r_k \leq r \leq R_V. \end{cases} \quad (4.32)$$

$r_k$  -- радіус ядра вихору.

Константи  $C_3, C_4$  визначаються за наступних умов: умови неперервності поля швидкості

$$C_3 + C_4 \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r_k^2\right) = \frac{\Gamma}{2\pi r_k} \left( 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r_k^2\right) \right)$$

та умови компактності поля швидкості (вихор є ізольованим)

$$0 = \frac{1}{R_V} \left( C_3 + C_4 \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda R_V^2\right) \right).$$

Розв'язавши систему рівнянь щодо  $C_3, C_4$ , отримуємо шукану модель – *компактний аналог вихору Бюргерса-Ротта*

$$V_{\theta} = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r^2\right) \right), 0 \leq r \leq r_k; \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r_k^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda R_V^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r_k^2\right)} \times \right. \\ \left. \times \left[ \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda R_V^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r^2\right) \right] \right), r_k \leq r \leq R_V. \end{cases} \quad (4.33)$$

Поле завихрення, згідно із (4.33), виглядає так:

$$\omega_z = \begin{cases} \Lambda \frac{\Gamma}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r^2\right), 0 \leq r \leq r_k; \\ \Lambda \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{\left( 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r_k^2\right) \right) \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda R_V^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r_k^2\right)} \right), r_k \leq r \leq R_V. \end{cases} \quad (4.34)$$

Значення  $r_k$  відповідає точці максимуму функції

$$V_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda r^2\right) \right).$$

На рис.4.1 можна побачити розподіли швидкості та завихрення вихору Бюргера-Ротта та щойно отриманого його компактного аналогу. Відповідно до розподілу швидкості (4.29), обертається весь простір. Натомість, розв'язок (4.33) показує, що обертання відбувається у скінченній області простору (приблизно три безрозмірні одиниці в радіальному напрямку). Розподіл завихрення має дві області протилежних знаків що уможливорює існування вихрової течії у компактній області.

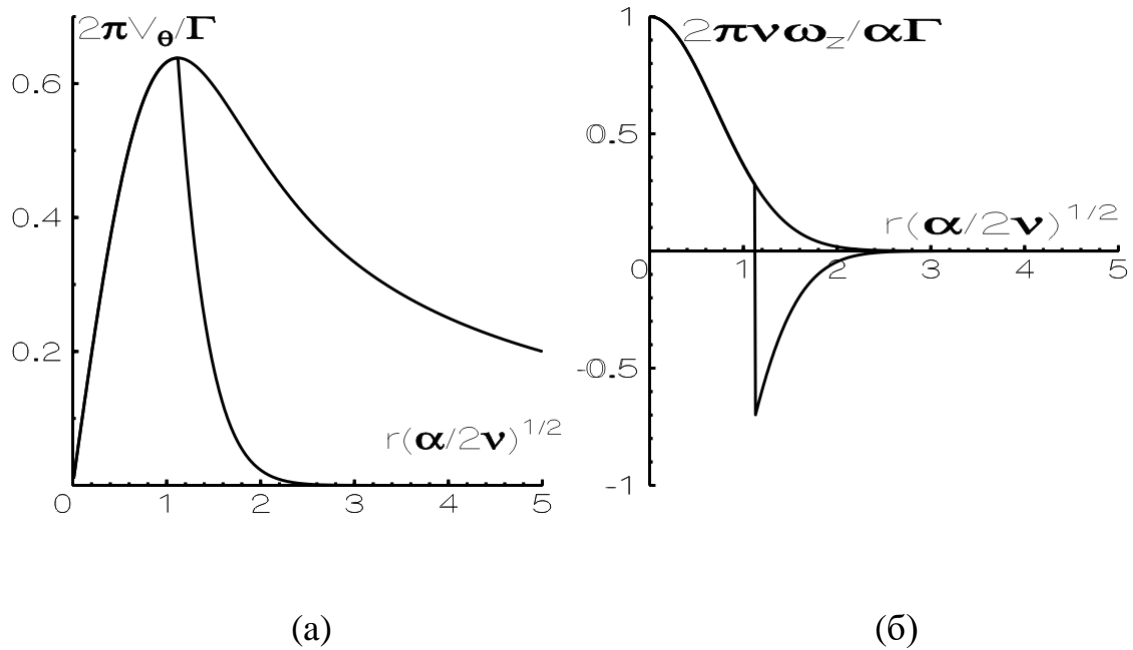


Рис. 4.1. Розподіли азимутальної швидкості (а) та завихрення (б) у вихорі Бюргерса-Ротта та його компактному аналогу.

#### 4.4. Компактний вихор Бюргерса з ламінарним ядром і турбулентною периферією.

Відповідно до розв'язку (4.29), поле швидкості на периферії вихору Бюргерса-Ротта зменшується швидше, ніж у точкового вихору (гіперболічний закон). Це, своєю чергою, означає інерційну нестійкість течії нестисливої рідини [51,93]. Можливо не випадково Бюргерс вважав течію турбулентною, хоча по суті використовував рівняння Нав'є-Стокса ламінарного руху (див. рівняння в [42]). У той час (1948) про пряме чисельне моделювання турбулентності на підставі рівнянь Нав'є-Стокса не могло бути й мови – комп'ютерів ще просто не існувало. Щоб модель вихору Бюргерса відповідала якомога ближче до реалії, розглянемо комбінований вихор. Ядро вихору – це вихор Бюргерса (4.29), а периферія – турбулентна течія на основі співвідношень (4.24)-4.(25), які тепер будуть розумітися як осереднені поля швидкості. Тож, як і для випадку

ламінарної течії, розглянемо загальні рівняння, що описують турбулентний тип течії. Це рівняння Рейнольдса [91] в циліндричній системі координат [11]:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial z} - \frac{\bar{V}_\theta}{r^2} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial z^2} - \frac{\bar{V}_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-r \rho \bar{V}_r'^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (-r \rho \overline{V_r' V_\theta'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{V_r' V_z'}) - \frac{1}{r} (-\rho \bar{V}_\theta'^2) \right); \quad (4.35)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial z} - \frac{\bar{V}_r \bar{V}_\theta}{r^2} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial z^2} - \frac{\bar{V}_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-\rho \overline{V_r' V_\theta'}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (-r \rho \bar{V}_\theta'^2) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{V_\theta' V_z'}) + \frac{2}{r} (-\rho \overline{V_r' V_\theta'}); \quad (4.36)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \theta} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-\rho \overline{V_r' V_z'}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (-\rho \overline{V_\theta' V_z'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \bar{V}_z'^2); \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \bar{V}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \bar{V}_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (r \bar{V}_z) = 0. \quad (4.38)$$

Підставивши співвідношення

$$\begin{cases} \bar{V}_r = -\alpha \cdot r, \\ \bar{V}_z = 2 \cdot \alpha \cdot z, \\ \bar{V}_\theta = \bar{V}_\theta(r) \end{cases}$$

в рівняння (4.35—4.37), отримаємо:



$$\rho \left( \alpha^2 r - \frac{\bar{V}_\theta}{r^2} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho \bar{V}_r'^2 \right), \quad (4.39)$$

$$\rho \left( -\alpha r \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial r} - \frac{\alpha \bar{V}_\theta}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\rho \overline{V_r' V_\theta'} \right) + \frac{2}{r} \left( -\rho \overline{V_r' V_\theta'} \right); \quad (4.40)$$

$$\rho 4\alpha^2 z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\rho \overline{V_r' V_z'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\rho \bar{V}_z'^2 \right) \quad (4.41)$$

Використаємо стандартну для таких течій гіпотезу Буссінеска [43] для опису рейнольдцевих турбулентних напружень

$$\tau_{ij} = -A_{ij} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} \quad (4.42)$$

де в (4.42)  $A_{ij}$  - коефіцієнти турбулентної дифузії.

$$\rho \left( -\alpha r \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial r} - \frac{\alpha \bar{V}_\theta}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( A_\theta \frac{d\bar{V}_\theta}{dr} \right) + \frac{2}{r} \left( A_\theta \frac{d\bar{V}_\theta}{dr} \right). \quad (4.43)$$

Оскільки у нас густина вважається сталою, то фізична величина має такий вимір

$$\left[ \frac{A_\theta}{\rho} \right] = \frac{m^2}{c} \Rightarrow \left[ \frac{A_\theta}{\rho} \right] = Const \frac{r^2}{t} \quad (4.44)$$

Використаємо (4.44) для стаціонарної задачі і покладемо:

$$A_\theta = A_0 r^2. \quad (4.45)$$

Згідно з (4.45), зі збільшенням масштабу коефіцієнт турбулентної в'язкості зростає пропорційно квадрату відстані до осі обертання вихору. Незважаючи на гіпотетичний характер співвідношення (4.45), слід зазначити, що і вихор

Бюргерса, який він сам вважав турбулентною течією, отриманий у припущенні сталості коефіцієнта в'язкості (див.[42]). Підставивши (4.45) у (4.43), отримаємо

$$\frac{d^2\bar{V}_\theta}{dr^2} + (4 + \Lambda_T) \frac{1}{r} \frac{d\bar{V}_\theta}{dr} + \Lambda_T \frac{1}{r^2} \bar{V}_\theta = 0., \quad (4.46)$$

$$\Lambda_T = \frac{\alpha\rho}{A_0}.$$

Загальний розв'язок (4.46) має такий вигляд:

$$\bar{V}_\theta = C_1 r^{-\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Lambda_T\right) + \frac{1}{2}\sqrt{9 + 2\Lambda_T + \Lambda_T^2}} + C_2 r^{-\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Lambda_T\right) - \frac{1}{2}\sqrt{9 + 2\Lambda_T + \Lambda_T^2}} \quad (4.47)$$

Варіюючи параметр  $\Lambda_T$ , можна отримувати різні розподіли швидкості. Ми ж наведемо явний вигляд розв'язку для значення

$$\Lambda_T = 1. \quad (4.48)$$

Об'єднуючи (4.47) з (4.48), отримуємо:

$$\bar{V}_\theta = C_1 r^{-2+\sqrt{3}} + C_2 r^{-2-\sqrt{3}}. \quad (4.49)$$

Константи в (4.49) визначимо за умови «зшивання» розв'язків (4.29) та (4.49) при  $r = r_k$ , а також умови компактності поля швидкості (що означає компенсованість поля завихрення):

$$\bar{V}_\theta(R_V) = 0. \quad (4.50)$$

Згідно із сказаним щодо граничних умов, отримується такий розв'язок :

$$\bar{V}_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( \frac{r}{r_k} \right)^{-1-\sqrt{3}} \frac{\left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{k}\right) \right]}{\left( 1 - \left( \frac{r_k}{R_V} \right)^{2\sqrt{3}} \right)} \left( 1 - \left( \frac{r}{R_V} \right)^{2\sqrt{3}} \right) \quad (4.51)$$

Завихрення, згідно із (4.51), має наступний вигляд

$$\bar{\omega}_z = \frac{\left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{k}\right) \right]}{\left( 1 - \left( \frac{r_k}{R_V} \right)^{2\sqrt{3}} \right)} \frac{\Gamma}{2\pi r^{3+\sqrt{3}}} \left( -(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3}) \left( \frac{r}{R_V} \right)^{2\sqrt{3}} \right) \quad (4.52)$$

На рис. 4.2. наведено отриманий розподіл. Нагадаємо, що вже давно в гідромеханіці користуються шматково-неперервними розв'язками [2]. І в цьому немає нічого крамольного. Більше того, задаючи в початковий момент вихор скінчених розмірів, ми надалі можемо стежити за його еволюцією, а система рівнянь сама зробить свою справу: всі типи рухів (моди), не характерні для неї, розсіє і залишить лише притаманні (тобто когерентні) моди. Важливо те, що початковий розподіл у вихорі не сягає нескінченності, яка грубо порушує закон збереження енергії: за скінчений проміжок часу скінчена потужність нездатна створити (перекачати в рух) нескінченну енергію. Саме цей недолік характерний практично всім існуючим моделям вихорів.

На останок, зазначимо цікаву роботу [52], де зокрема показано, що всередині примежового шару вихрова доріжка Кармана, в її звичайному уявленні не може утворитись. Фонова зсувна течія примежового шару підсилює утворення вихрової пелени того ж самого знаку і унеможлиблює розвиток вихрової пелени із обертанням у іншу сторону. Ось чому в доповіді Прандтля [91] спостерігається утворення вихрової пелени саме одного знаку завихрення в примежовому шарі на крили.

#### 4.5. Моделювання вихрової доріжки фон Кармана на основі моделей компактних вихрових течій.

Обтікання обтічного тіла за рахунок нестійкості породжує так звану вихрову доріжку Кармана. Це шахова послідовність компактних вихорів. У підручниках з гідромеханіки [66] можна знайти аналітичний вираз для комплексного потенціалу

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left( \ln \left( \sin \frac{\pi z}{a} \right) - \ln \left( \sin \frac{\pi}{a} \left( z - \frac{1}{2}a - ih \right) \right) \right). \quad (4.53)$$

У виразі (4.53):  $\Gamma$  -- циркуляція,  $a, h$  -- просторові масштаби.

Однак модель точкового вихору, що використовується в (4.53), не відповідає фізиці явища. Відриваючись від тіла, вихори вихрової доріжки утворюються лише один за одним, а не парами. Причому, як зазначено в [66] та показано вище в даній роботі, кінетична енергія точкового вихору дорівнює нескінченності. Це твердження справедливе і для периферії вихору Ранкіна, вихору Бюргерса-Ротта, Озеена, Суллівана та багатьох інших [81], оскільки всі зазначені вихри мають гіперболічний розподіл швидкостей в якості асимптотики при віддаленні від осі обертання. Отже, всі щойно зазначені моделі, зокрема точковий вихор і вихор Ренкіна, не відповідають скінченній кінетичній енергії кожного вихору у вихровій доріжці, не кажучи вже про компактну природу вихорів [7].

В якості альтернативи для точкового вихору та вихору Ренкіна автори [7] використовували для апроксимації вихрової доріжки Кармана ізольований гауссіан [36]

$$V_{\theta} = V_0 \cdot r \cdot \exp(-r^2). \quad (4.54)$$

Поле завихрення, що відповідає (4.54), має області значень різних знаків, як і (4.34), (4.52). Дійсно

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{d(rV_\theta)}{dr} = 2(1-r^2)\exp(-r^2). \quad (4.55)$$

В точці  $r=1$  завихрення (4.55) змінює знак – з додатного на від’ємний. Автори [7] вважають модель (4.54) значно кращою, ніж модель точкового вихору. Їхня аргументація ґрунтується на тому, що просто необхідно враховувати лише дві пари ізольованих гауссівських вихорів замість двадцяти або близько того пар точкових вихорів.

Проте модель (4.54) має недоліки. Розмір ядра вихору та розмір самого вихору (у якому швидкість падає до 1-2% порівняно з максимальним значенням) суворо корелюють співвідношенням (4.54). Така кореляція також відповідає моделі, заснованій на законі Річардсона 4/3 [95], турбулентної дифузії вихору [12]

$$V_\theta = V_0 r \cdot \exp(-0.75r^2). \quad (4.56)$$

Завихрення, згідно із (4.56), є

$$\omega_z = V_0 (1 - 0.75r^2) \cdot \exp(-0.75r^2). \quad (4.57)$$

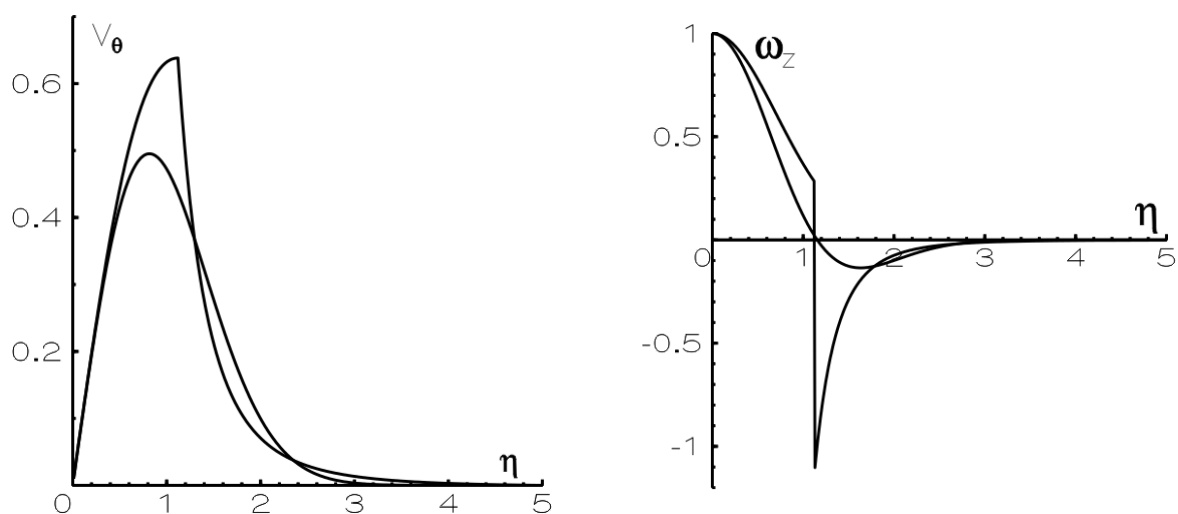


Рис. 4.2. Розподіли швидкості (а) та завихрення (б) в автотельному розв’язку (4.56-4.57) та (4.51-4.52)

Цей недолік був подоланий у моделях квазіточкових ламінарних [13] та квазіточкових турбулентних [3] вихорів. Ці моделі засновані на розв'язках відповідних стаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса у вигляді Громеки -Лемба. Для ламінарної течії маємо розв'язок (4.7) у вигляді квазіточкового вихору [13]

$$V_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - \left( \frac{r}{R_V} \right)^2 \right). \quad (4.58)$$

Для турбулентної течії, якщо знехтувати молекулярною дифузією, осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса у формі Громеки-Лемба призводить до наступного рівняння (частинний випадок (4.43), коли є лише азимутальна швидкість)

$$0 = K_T \left( \frac{d^2 \bar{V}_{\theta}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\bar{V}_{\theta}}{dr} \right), \quad (4.59)$$

Розв'язок (4.59), що є дуже близьким до точкового вихору, має вигляд (подробіці в роботі [3])

$$\bar{V}_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r}{R_V} \right). \quad (4.60)$$

Обидва розв'язки, -- (4.58) і (4.60), -- можуть бути використані для опису вихрових доріжок у якості початкових розподілів поля швидкості. Аналог формули (4.53) у випадку ламінарної течії має вигляд

$$V_{\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{-\Gamma}{2\pi \left[ (x-ma)^2 + y^2 \right]^{1/2}} \left( 1 - \frac{(x-ma)^2 + y^2}{R_V^2} \right) +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{-\Gamma}{2\pi \left[ (x-(m+1/2)a)^2 + (y-h)^2 \right]^{1/2}} \left( 1 - \frac{(x-(m+1/2)a)^2 + (y-h)^2}{R_V^2} \right).$$

Для граничної турбулентної течії (числа Рейнольдса кілька мільйонів і вище) можна побудувати поле швидкості вихрової доріжки на основі квазіточкової моделі турбулентного вихору [3]

$$\begin{aligned} V_{\theta} = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{-\Gamma}{2\pi \left[ (x-ma)^2 + y^2 \right]^{1/2}} \left( 1 - \frac{(x-ma)^2 + y^2}{R_V^2} \right) + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{-\Gamma}{2\pi \left[ (x-(m+1/2)a)^2 + (y-h)^2 \right]^{1/2}} \times \\ & \times \left( 1 - \frac{\left[ (x-(m+1/2)a)^2 + (y-h)^2 \right]^{1/2}}{R_V} \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Для опису нестационарної вихрової доріжки Кармана можна використовувати розв'язок задачі про генерацію турбулентного вихору тонким циліндром [31] у наближенні сталості коефіцієнта турбулентної дифузії. У [31] отримано асимптотичний розв'язок для такого нестационарного рівняння Нав'є-Стокса у формі Громеки-Лемба, осередненого за Рейнольдсом

$$\frac{\partial \bar{V}_{\theta}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \bar{V}_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{V}_{\theta}}{\partial r} \right). \quad (4.62)$$

Розв'язок (4.62) має вигляд:

$$\bar{V}_{\theta}(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - \text{erf} \left( \sqrt{\frac{\text{Re}}{t}} \frac{(r-R_i)}{2} \right) \right]. \quad (4.63)$$

$R_i$  -- радіус циліндру , що обертається і генерує вихор.

Рівняння (4.62) та його розв'язок (4.63) в безрозмірних величинах відповідають задачі про асимптотичну (для досить великих моментів часу) поведінку турбулентного вихору, що генерується циліндром малого радіусу  $R_i$ . Цей розв'язок графічно дуже близький до (4.60) і до розподілу в точковому вихорі. Водночас він не є стійким і компактным за Сефманом. Застосовавши (4.63) до опису вихрової доріжки Кармана, можна отримати

$$V_{\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{-\Gamma}{2\pi \left[ (x-ma)^2 + y^2 \right]^{1/2}} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{\operatorname{Re}}{t}} \left[ \frac{(x-ma)^2 + y^2}{2} \right]^{1/2} \right) \right) +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{-\Gamma}{2\pi \left[ (x-(m+1/2)a)^2 + (y-h)^2 \right]^{1/2}} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{\operatorname{Re}}{t}} \left[ \frac{(x-(m+1/2)a)^2 + (y-h)^2}{2} \right]^{1/2} \right) \right)$$

Серед сучасних робіт заслуговує на згадку робота [56], в якій автор пропонує робастну модель вихрової доріжки Кармана. Модель не має особливостей на осі вихору. Існує також ще одна модель стійкої вихрової доріжки Кармана. В ній використовуються узагальнені моделі компактного компенсованого турбулентного вихору --розв'язки рівняння (4.61) [32]. Поле швидкостей можна представити у вигляді

$$V_{\theta} = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_{\theta}^{Ut} \left( (x-ma)^2 + y^2 \right) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_{\theta}^{Ut} \left( (x-(ma+1/2))^2 + y^2 \right)$$

де



$$v_{\theta}^{Ut} = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi r}, & 0 \leq r \leq \varepsilon; \\ \frac{\Gamma}{2\pi(R_V - \varepsilon)} \left( \frac{R_V}{r} - 1 \right), & \varepsilon \leq r \leq R_V; \\ 0, & r > R_V. \end{cases}$$

### Обговорення

Незважаючи на багаторічну (починаючи з відомої роботи Гельгольца 1858) історію вихрової динаміки, в цій галузі науки існують певні суттєві недоліки. Вони пов'язані з тим, що явище із більш глибокою фізичною сутністю (природою) замінюється (безпідставно) набагато простішими. Зокрема, йдеться про заміну суттєво в'язкого вихрового руху на нев'язкий. При цьому неявно розуміється математична простота опису нев'язкого руху. Але, як показано в даній роботі, вказане спрощення безпідставне і має негативні наслідки. Перебуваючи на засадах моделі нев'язкої течії рідини, неможливо фізично тлумачити утворення в примежовому шарі вихрової пелени, а також її подальше існування у вигляді вільних компактних вихорів. Зародження вихрової пелени та пізня стадія її існування (вільний вихор) мають неабияке важливе значення для чисельного моделювання [3]. Вони, по суті, відіграють роль початкової та умовно кінцевої граничних умов за часом і дають змогу тестувати різні складні моделі утворення та розвитку вихрових течій, що мають місце при обтіканні крила та тіла в цілому потоком в'язкої рідини.

Значним кроком в розумінні фізики примежового шару стало відкриття того факту, що молекулярна в'язкість є змінною величиною при русі тіла в рідині. Цей факт, безперечно, відкриває нові можливості у вивченні примежового шару та течій, що в ньому утворюються.

### Висновки до розділу.

Шляхом використання методів варіаційного числення вдалося показати можливість утворення всередині примежового шару нестисливої рідини квазі-

твердотільного обертального руху. Саме наявність в'язкості, а точніше її врахування (примежовий шар) вказує на можливий, завдяки нестійкості Кельвіна-Гельмгольца, перехід течії від плоско паралельного руху до щойно вказаного обертального. Крім того, в роботі отримані дві нових моделі вихрової течії Бюргерса-Ротта. Перша модель використовує загальний розв'язок, отриманий Бюргерсом, але ця модель відповідає комбінованому вихорю: хоча поле швидкості в ньому є неперервним, поле завихрення має розрив – в точці максимуму поля швидкості. Доводиться, що такий підхід є цілком можливим: рівняння руху задовольняється усюди, тобто у кожній точці простору дотичні напруження є неперервними функціями. Оскільки периферія вихору Бюргерса-Ротта є нестійкою течією, то запропоновано іншу модель – із ламінарним ядром і турбулентною периферією. Звичайно ж, рух частинок у периферійній області описується іншим, ніж у Бюргерса, розподілом швидкості. На останок, розглянуто можливе використання відомих моделей компактних вихрових течій при моделюванні вихрової доріжки фон Кармана. Із зазначенням переваг цих моделей.

При обтіканні крила або тіла скінченої товщини утворюються характерні вихрові структури: вихрова пелена (в в'язкому примежовому шарі), вихорі на передньому ребрі крила (або тіла) (leading edge vortices [57]), а також вихрова доріжка Кармана. Плутанина або просто нерозуміння в області вихрової динаміки, коли в'язкий вихровий рух вважають нев'язким, призвела до появи наукових напрямків (метод дискретних вихорів і т. і.), де до уваги не береться фізична природа вихроутворення. Поле швидкості апроксимується шляхом штучного накладання пари вихрових течій (диполя), натомість як зазначено в даній роботі, примежовий шар підсилює вихорі одного напрямку обертання і унеможлиблює (подавлює) -- протилежного. Крім цього, також зазначається, з посиленням на джерела, що під час утворення вихорів у примежовому шарі на етапі їх відриву від поверхні тіла відбувається процес утворення області завихреності оберненого знаку, що уможлиблює існування компактних

(ізолюваних) вихрових течій. Процес утворення вихрової пелени пов'язаний із нестійкістю Кельвіна-Гельмгольца та неоднорідністю поля швидкості уздовж поверхні тіла (область розвитку течії). Жодна з відомих моделей, якими моделюється *leading edge vortices* або вихрова пелена, а також вільні вихорі, що зійшли з тіла, включаючи вихрову доріжку Кармана, на сьогодні не моделюються компактними вихорами – такими, у яких поле швидкості зосереджено в скінченій області. Часто їх також називають ізолюваними вихорами. Природа утворення геофізичних вихорів (атмосфери і океану) призвела до розуміння того, що реальні вихорі не можуть мати нескінчену кінетичну енергію і отже існуючі моделі вихорів слід поліпшити, зробивши їх такими, що не суперечать фундаментальному закону природи -- збереження та перетворення енергії. Першу спробу використання компактного аналога вихору Ренкіна було здійснено, без будь якого обґрунтування, Штерном [58]. Але його робота залишилась без належної уваги з боку фахівців із вихрової динаміки. Незалежно від Штерна, повністю обґрунтовано, з математичної і фізичної точок зору, вказані моделі компактних вихрів було розвинуто одним із авторів роботи протягом приблизно 15 попередніх років. Цей досвід допоміг розібратись із гарно відомою моделлю вихра Бюргерса-Ротта, що широко використовується в задачах авіації. Оскільки вихор Бюргерса-Ротта, так само як і вихор Ренкіна, не є компактним, то було запропоновано виключно на підставі загального розв'язку, що отримав Бюргерс, зробити течію компактною, тобто такою, що існує в межах скінченної області. Хоча такий вихор є складеним, але рівняння збереження кількості руху (Нав'є-Стокса у формі Громеки-Лемба) виконується у кожній точці простору. Вказується, з посиланням на поважні наукові джерела, що такий підхід вже давно використовується у механіці рідини та газу – клас функцій, в яких не тільки поле швидкості, але і її похідні, є неперервними не дозволяє досить просто моделювати течії та відповідно розв'язувати задачі.

Ще одним суттєвим моментом є те, що периферії вихрових течій, таких як вихор Бюргерса-Ротта та інших, є нестійкими. Навіть у назві статті Бюргерса

йдеться про турбулентну течію. Тому, замість периферії вихору Бюргерса-Ротта, що відповідає ламінарній течії, біла запропонована більш реальна модель— вихор із ламінарним ядром та турбулентною периферією. При цьому було використано розмірність коефіцієнта турбулентної дифузії і прийнято припущення, що у стаціонарній турбулентній течії турбулентна дифузія пропорційна квадрату відстані до осі обертання – як в автомобельній змінній, що використовується в теорії дифузії вихору. Вказане припущення дозволило побудувати модель, поля швидкості та завихрення в яких є досить близькими до тих, що отримуються за моделлю, в якій використано закон Річардсона для турбулентної дифузії в стратифікованому середовищі (атмосфера, океан).

Що стосується безпосередньо вихрової пелени, то було показана можливість турбулентного типу руху у вигляді вихорів, що котяться по зовнішній (майже нерухомій) межі примежового шару, що корелює із явищем нестійкості Кельвіна-Гельмгольца і головне уможлиблює існування системи вихорів із одним напрямком обертання – без додавання фіктивних, як у методі дискретних вихорів.

Нарешті, відносно вихрової доріжки Кармана, то для її опису теж запропоновані різні моделі компактних вихрових течій – як ламінарних, так і турбулентних.

У якості подальших досліджень можна розглянути застосування запропонованих моделей компактних вихрових течій у чисельному моделюванні та порівняти із результатами інших досліджень.

## Висновки

В даній дисертаційній роботі розглянута дуже важливе для авіації питання – обтікання рідиною рухомого тіла. На початку досліджень вважалося, що питання опису течії в ламінарному примежовому шарі вже давно закрите. Існують відповідні теорії ламінарного примежового шару. Тому з самого початку формулювалися задачі про турбулентний рух рідини в примежовому шарі. Успішний досвід опису нестисливої течії рідини у області із легко прониклою шорсткістю, на підставі варіаційного числення, спрямував дослідження у цьому напрямку. В решті решт, стало зрозумілим, що теорія Стокса має суттєві недоліки, бо на її підставі неможна прямо розв'язати найпростіші задачі механіки в'язкої течії рідини. Серед таких задач є: стаціонарний рух площини у нескінченному просторі, що заповнений рідиною, розгін площини із подальшим її стаціонарним рухом у нескінченному просторі, задача (стаціонарна та нестаціонарна) про область розвитку течії рідини. Отримання фізичних розв'язки цих класичних задач стало можливим лише тільки після застосування варіаційного числення. Цей шлях показав, що течії рідини в без-градієнтному та градієнтному примежових шарах зовсім різні. І це підтверджується експериментально. Зокрема, в без-градієнтному ламінарному примежовому шарі нестисливої течії рідини молекулярна в'язкість має бути функцією просторових координат і часу (для нестаціонарних задач).

Суттєвий недолік теорії Стокса полягає у тому, що Стокс безпідставно припустив строге виконання умови прилипання частинок рідини до твердого тіла. Ця умова не дозволяє прямо використовувати рівняння Нав'є-Стокса для розв'язання дуже важливої задачі – формування течії у примежовому шарі на початку області обтікання. Тільки відхід від цієї умови дозволив отримати, на підставі узагальнення рівнянь Нав'є-Стокса для нестисливої течії рідини, фізично адекватні розв'язки, які не суперечать закону збереження маси.

Показано, що результати опису примежового шару на площині збігаються із результатами для течії у примежовому шарі на циліндричній поверхні, а для

протяжного тіла обертання, у якого кут нахилу кривої огинання є невеликим, ці результати є наближеними.

Оскільки рух літака генерує вихорові течії, то цей тип руху теж був розглянутий в роботі. Отримані бідьш фізичні (узгоджені із законом збереження енергії) аналітичні моделі основних типів вихрових рухів, що генеруються під час польоту літака.

### **Основні наукові здобутки дисертаційної роботи такі:**

1. Запропонований та отримав розвиток узагальнений підхід опису нестисливої та слабко нестисливої ламінарної течії рідини у без-градієнтному примежовому шарі, що відповідає руху літака зі швидкостями до 0,2—0.6 Ма (числа Маха). Суть цього підходу полягає у тому, що лише припущення мінливості молекулярної в'язкості, як у просторі так і в часі, дає можливість адекватно описувати примежовий шар – область впливу твердої фази на рідку.

2. На підставі запропонованої концепції були отримані фізичні розв'язки таких класичних задач як рух площини у нескінченному середовищі, розгін із подальшим стаціонарним рухом площини у нескінченному середовищі, задача про область розвитку течії в примежовому шарі (стаціонарна та нестаціонарна).

3. Доведено, що умова повного прилипання частинок рідини до рухомого тіла не всюди виконується, бо суперечить закону збереження маси та самому поняттю області розвитку течії, де повинні обов'язково бути присутні обидві компоненти поля швидкості.

4. Показано, що отримані результати легко переносяться на примежовий шар поблизу криволінійних поверхонь із осьовою симетрією (труби, фюзеляж літака, інше).

5. Отримані аналітичні моделі, які узгоджуються із законом збереження енергії, відомих типів вихрового руху, що генерується під час польоту літака: вихрової пелени, Вихрової доріжки Кармана, від'єданого віхору Бюргерса-Ротта

### Література:

1. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. Москва : Наука, 1978. 352 с.
2. Бетяев С.К. Гидродинамика: проблемы и парадоксы. *Успехи физических наук*. 1995. т. 165, №3. С. 299-330.
3. Блюсс Б.О., Лук'янов П.В., Дзюба С.В. Моделювання квазіточкового турбулентного вихору в закручених течіях рідини в збагачувальному устаткуванні. *Геотехнічна механіка. Між від. Зб. Науков. Праць. м. Дніпро*. 2018. № 143. С. 19—25.
4. Буланчук Г.Г., Буланчук О.Н., Довгий С.А. Метод дискретных вихревых рамок со вставкой промежуточных точек на вихревой пелене. *Вісник Харківського національного університету*. 2009. №.863. С. 37-46.
5. Гаєв Є.О., Гаєва К.А. Математичне моделювання технічних і природніх течій, які обумовлені легкопроникною шорсткістю. *Вісник НАУ*. 2001. № 2. С. 76-81.
6. Головкин М.А., Головкин В.А., Калявин В.М. *Вопросы вихревой гидродинамики*. ФИЗМАТЛИТ 2009, 264 с.
7. Горшков К.А., Соустова И.А., Сергеев Д.А. Об устойчивости вихревых дорожек в стратифицированной жидкости. *Изв. РАН ФАО*. 2007. т. 43 №6. С. 851-860.
8. Жарий, О.Ю., Улитко, А.Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. Киев : Выща школа, 1989. 184 с.
9. Комаров Б.Г., Зінченко Д.М., Андреев О.М. Вплив форми крила на характеристики при використанні інтегрованої роторної силової установки літака. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2023. №2(186). С. 17--26. doi: 10.32620/aktt.2023.2.02
10. Лойцянский Л.Г. и Лурье, А.И. Курс теоретической механики, т. 2. Динамика. 5-еизд. Москва : ГИТТЛ, 1954. 595 с.

11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учеб. для вузов. Изд. 6-е перер. и доп. М.: Наука. Гл. ред.. физ.-мат. лит. , 1987. 840 с.
12. Лукьянов П.В. Диффузия изолированного квазидвумерного вихря в слое стратифицированной жидкости. *Прикладна гідромеханіка*. 2006. т. 8(80), №3. С. 63—77.
13. Лук'янов П.В. Модель кваіточкового вихору. *Наукові вісті НТУУ КПІ*. 2011. №4 (78). С. 139-142.
14. Лук'янов П.В. Генерація компактного турбулентного вихора: наближена модель для відносно великих моментів часу. *Наукові вісті НТУУ КПІ*. 2013. №4 (90). С. 127—131.
15. Лук'янов П.В. Інерційна стійкість як результат співвідношення переносного і відносного обертань нестисливої рідини. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. 2014. №4(96). С. 133-138.
16. Лукьянов П.В. Универсальная модель компактного вихря и её применение для компактных квазивинтовых потоков. *Авіа – 2017*. Матеріали ХІ міжнар. наук.—техн. конф. м. Київ, 19—21 травня 2017 р. Київ, 2017. Т.1 . С. 7.16—7.21.
17. Лукьянов, П.В. Оптимальное течение жидкости в плоском канале при наличии легкопроницаемой шероховатости. *Промислова гідраліка і пневматика*. 2019. 1(63). С. 25-34.
18. Лук'янов П.В., Сунь Л. Стаціонарна оптимальна турбулентна течія у плоскому каналі: аналітичний розв'язок на підставі моделі Рейнольдса-Буссинеска. *Гідроаеромеханіка в інженерній практиці: матеріали ХХVІ міжнародної наук.-техн. конф., м. Київ, 7--10 вересня 2021 р. Київ-Херсон, 2021. С. 201--203.*
19. Лук'янов П.В., Сунь Л. Стаціонарна оптимальна турбулентна течія у круглій трубі: аналітичний розв'язок на підставі моделі Рейнольдса-Буссинеска. *Гідроаеромеханіка в інженерній практиці: матеріали ХХVІ міжнародної наук.-техн. конф., м. Київ, 7--10 вересня 2021 р. Київ-Херсон, 2021. С. 204--206.*



20. П.В. Лук'янов. Застосування теорем Гельмгольца та Стокса про вихорову трубку для обґрунтування її компактності. *Матеріали XXII міжнародної науково-технічної конференції ФС ПГП «Промислова гідравліка і пневматика»*. Київ, 17-18 листопада. Вінниця: «Глобус-Прес», 2021, С. 30-32.
21. Лук'янов П.В., Сун Л. Чисельне знаходження розв'язку для стаціонарного ламінарного граничного шару нестисливої рідини на циліндричній поверхні. *Комп'ютерна гідромеханіка: матеріали VIII міжнародної наук.-практ. конф. м. Київ, 27-28 вересня 2022 р. Київ. 2022. С. 53-54.*
22. Лук'янов П.В., Сунь Л. Турбулентний примежовий шар стаціонарної течії нестисливої рідини. *Промислова гідравліка і пневматика: матеріали XXIII міжнародної наук.-техн. конф. АС ПГП, м. Київ, 15-16 грудня 2022 р. Київ, 2022. С. 41.*
23. Лук'янов П.В., Сунь Л. Просторова залежність молекулярної в'язкості в ламінарній течії Куетта. *Промислова гідравліка і пневматика: матеріали XXIII міжнародної наук. -техн. конф. АС ПГП, м. Київ, 15-16 грудня 2022 р. Київ, 2022. С. 42-43.*
24. Лук'янов П.В., Сунь Л. Ламінарна течія в'язкої нестисливої рідини внаслідок рівномірного розгону площини. *Гідроаеромеханіка в інженерній практиці: матеріали XXVII міжнародної наук.-техн. конф., м. Київ, 31 травня – 2 червня 2023 р. Київ, 2023. С.15--17.*
24. Миллионщиков М.Д. Турбулентное течение в пограничном слое и трубах. Москва : Наука, 1969. 345 с.
25. Моклянчук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. Київ : Видавничо—поліграфічний центр „Київський університет”, 2009, 380 с.
26. Овчаров М.М. Методика расчета нелинейных аэродинамических характеристик летательного аппарата при несимметричном обтекании. *Авіаційно-космічна техніка і технологія* . 2012. №6(93). С. 48—56.

27. Павлюченко А.М. , Шийко О.М. Комплексний метод розрахунку опору тертя і теплообміну на поверхні льотних осесиметричних об'єктів при польоті по траєкторії з наявністю в пристінному прикордонному шарі неізотермічності, стисливості, ламінарно-турбулентного переходу та ламінаризації. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2018. №1(145). С. 4-28.
28. Соловйов О.В. , Прусак О.В., Корбіна Н.В. Структура вихрових слідів та їх дія на літальні апарати. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2015. №3(120). С. 41--49.
29. Усенко В.Ю., Балалаєва К.В., Мітрахович М.М. Моделювання течії в співвісному гвинтовентиляторі з управлінням примежовим шаром. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2021. №4(173). С. 35-40. doi: 10.32620/akt.2021.4sup1.05
30. Шербокос О.Г. Розподіл нестационарного тиску на крилі з генераторами вихрів. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2012. №2(89). С. 60—65.
31. Шеховцов А.В. Инерционно-вихревой принцип генерации усилий на крыльях насекомых. *Прикладна гідромеханіка*. 2011.Том. 13, №1. С.61-76.
32. Abdul- Ghafour Q.A. A general velocity profile for a laminar boundary layer over a flat plate with zero incidence. *Journal of Engineering*. 2011. Vol. 17.
33. Anuar I., Roslinda N., Ioan P. Dual Solutions of the Extended Blasius Problem. *MATHEMATICS*. 2009. Vol. 25, No.2. P. 107--111.
34. Baker G., Cafilisch R.E. and Siegel M. Singularity formation during Rayleigh-Taylor instability. *J. Fluid. Mech.* 1993. vol. 252. P. 51-78.
35. Batchelor, G.K. An introduction to Fluid Dynamics. Cambridge: University Press, 1967. 615 p.
36. Beckers, M., Verzicco, R., Clerx, H.J.H., and van Heijst, G.J.F. Dynamics of pancake-like vortices in a stratified fluid: experiments, model and numerical simulations. *J. Fluid Mech.* 2001. Vol. 433. P. 1-27.  
DOI:10.1017/S0022112001003482

37. Berlok T. and Pfrommer C. On the Kelvin-Helmholtz instability with smooth initial conditions – linear theory and simulations. *MNRAS*. 2019. No.485. P. 908-923. [DOI:10.1093/mnras/stz379](https://doi.org/10.1093/mnras/stz379)
38. Bernard P. S. A Vortex Method for Wall Bounded Turbulent Flows. *Esaim: Proceedings*. 1996. Vol. 1.P. 15-31.
39. Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung Blasius. *Z. Math. Phys.* 1908. Vol. 56. P. 1-37.
40. Boltze, E. *Grenzschichten an Rotationskoehrpern*. Gohhtingen, 1908.
41. Bretheim J.U., Meneveau C., Gayme D.F. Standard logarithmic mean velocity distribution in a band-limited restricted model of turbulent flow in a half-channel. *Phys. Fluids*. 2015. Vol. 27. P. 011702. [doi.org/10.1063/1.4906987](https://doi.org/10.1063/1.4906987).
42. Burgers J. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in applied mechanics*. 1948. Vol. 1. P. 171-199.
43. Boussinesq J. Essaisur la theorie des eauxcourantes. *Memories presentees par diverses savants al' Acad. d. Sci.* 1877. Vol. 23.
44. Chen J., Kim Y.J., Hwang W.R. General criteria for estimation of effective slip length over corrugated surfaces. *Microfluids and Nano-fluids*. 2020. Doi: 10.1007/s 10401-020-02361-3
45. Chorin A.J. Vortex models and boundary layer instability. *SIAM. J. Sci. Stat. Comput.*1980. Vol. 1, No.1. P. 1-21
46. Colin P., Mc. Nally, Lyra W. and Passy J.C. A well-posed Kelvin-Helmholtz instability test and comparison. *The Astropjysical Journal*. 2012 Supplement Series. 201.18 17pp. [DOI:10.1088/0067-0049/201/2/18](https://doi.org/10.1088/0067-0049/201/2/18)
47. Cui H., Ren W. A note on the solution to the moving contact line problem with the no-slip boundary condition. *Commun. Math. Sci.* 2019. Vol. 17, No. 4. P. 1167-1175.
48. Dhawan, S. Direct Measurements of Skin Friction: Ph.D. dissertation. California Institute of Technology, 1951. 76 p. doi:10.7907/1S03-8631. <https://resolver.caltech.edu/CaltechETD:etd-09262002-155504>

49. Dorodnitsyn, A.A. Pogranichnyi sloiy v szhymaemom gaze. *Prikl. mat. i mekh.* 1942. Vol. 6, No. 6. P. 449-486.
50. Driest van E.R. On Turbulent Flow Near a Wall. *Journal of Aeronautical Science.* 1956. Vol. 23. P. 1007-1011. doi.org. /10.2514/8.3713.
51. Eldredge J. D. and Jones A.R. Leading-Edge Vortices: Mechanics and Modelling. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2019. Vol.51. P.75-104.[DOI:10.1146/annurev-fluid-010518-040334](https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010518-040334).
52. Flow and Transport Processes with Complex Obstructions: Applications to Cities, Vegetative Canopies, and Industry / Ye. Gayev, J.C.R. Yunt editors // NATO Science Series. – Springer Publ. 236, 2006. 350 p.
53. Garcia, C. Karman Vortex Street in incompressible fluid models arXiv:1905.07728v1 [math.AP] 19 May 2019.
54. Gohrtler H. Verdr angungswirkung der laminaren Grenwiderstand. *Ingen. Arch.* 1944. Vol. 14. P. 286-305.
55. Gomes-Serrano J., Park J., Shi J., Yao Y. Remarks on Stationary Uniformly-rotating Vortex Sheets Rigidity Results. *Commun. Math. Phys.* 2021. DOI:10.1007s0020-021-04146-3.
56. Guo L., Chen S., and Robbins M.O. Effective slip boundary conditions for sinusoidally corrugated surfaces. *Phys. Rev. Fluids.* 2016. Vol. 1, iss. 7. article no. 074102. DOI:10.1103/ PhysRevFluids. 1.074102.
57. Hoepffner J. and Fontelos M. A model for global structure of self-similar vortex sheet roll-up. <http://www.jussieu.fr/research/spirals>
58. Horiuti K. A classification method for vortex sheet and tube structures in turbulent flows. *Physics of fluids.* 2001. No.13. 3756.[DOI:10.1063/1.1410981](https://doi.org/10.1063/1.1410981)
59. Horiuti K. and Takagi Y. Identification method for vortex sheet structures in turbulent flows. *Physics of fluids.* 2005. No.17. 121703. DOI:10.1063/1.2147610
60. Howarth L. Rayleigh's problem for semi-infinite plate. *Proc. Camb. Phil. soc.* 1950. Vol. 46P. 127-140.

61. Karman v. Th . Laminare und Turbulent Reibung. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1921. Vol. 1. P. 233-252. doi.org/10.1002/zamm.19210010402.
62. Kelly R.E. The Stability of unsteady Kelvin-Helmholtz flow. *J. Fluid Mech.* 1965. Vol. 22, part. 3. P. 547-560.
63. Kiya M., Arie M. Formation of Vortex Street in Laminar Boundary Layer. *Journal of Applied Mechanics*. 1980. Vol. 47. P. 227-233.
64. Kloosterziel R.C., Heijst G.J.F. An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *Journal of Fluid Mechanics*. 1991. Vol. 223. P. 1-24.
65. Kulkarni Y., Fullana T., Zaleski S. Stream function solutions for some contact line boundary conditions: Navier slip, super slip and generalized Navier boundary conditions. *Proc. R. Soc.* 2023. A 479:20230141. DOI: 10.1098/rspa.2023.0141.
66. Lamb H. *Hydrodynamics*, 6<sup>th</sup>ed. Cambridge: University Press, 1932. 738 p.
67. Lauga E., Stone H.A. Effective slip in pressure-driven Stokes flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 2003. Vol. 489. P. 55-71.
68. Lauga E., Squires T.M. Brownian motion near a partial-slip boundary: A local probe of no-slip condition. *Physics of Fluids*. 2005. Vol. 17. P. 103102.
69. Lin C.L., Kaminski A.K., Smyth W.D. The effect of boundary proximity on Kelvin-Helmholtz instability and turbulence. *J. Fluid Mech.* 2023. Vol. 966, A2. DOI:10.1017/jfm.2023.412.
70. Lin M., Cui G., Zhang Zh. A new vortex model for simulating aircraft wake evolution. *Chines Journal of Aeronautics*. 2017. No. 30(4). P. 1315—1326. [DOI:10.1016/j.cja.2017.04.015](https://doi.org/10.1016/j.cja.2017.04.015)
71. Loitsianski L.G. The development of boundary layer theory in the USSR . *Ann . Rev. fluid. Mech.* 1970. Vol. 2. P. 1--15.
72. Lord Rayleigh. On the motion of solid bodies through viscous liquids *Phil. Mag.* 1911. Vol. 21, No. 6. P. 697-711.

73. Lukianov P.V., Song L. Optimal character and different nature of flows in laminar boundary layers of incompressible fluid flow. *Problems of friction and wear*. 2022. No. 4(97). P. 52-60. doi : 10.18372/0370-2197.4(97)16959.
74. Lukianov P.V., Song L. Unsteady incompressible laminar boundary layer: time and space variable molecular viscosity. *Aviatsiyno-kosmichna tekhnika i tekhnolohiya*. 2023. No. 3(187). P. 50-60. doi: 10.32620/akt.2023.3.06
75. Lukianov P.V., Song L. Compact analogs of the models of vortex flows generated by aircraft flight. *Aviatsiyno-kosmichna tekhnika i tekhnolohiya*. 2023. No 5(191). P. 4-20. doi: 10.32620/akt.2023.5.01
76. Lukianov P.V., Song L. Flow development region in the boundary layer: two-component molecular viscosity and partial slip. *Aviatsiyno-kosmichna tekhnika i tekhnolohiya*. 2023. Vol. 6(192). P. 38--47. doi: 10.32620/akt.2023.6.05
77. Lukianov P., Song L. Pressure field distribution in incompressible flow development region of laminar boundary layer. *Computer Hydromechanics: materials of IX Intern. Conf. Kyiv, October 1—2, 2024. Kyiv, 2024. p. 109-110.*
78. Mandre, S. Brachistochronous motion of a flat plate parallel to its surface immersed in a fluid. *J. Fluid Mech.* 2022. Vol. 939. P. A27. doi.org/10.1017/jfm.2022.217.
79. Maupertuis P.L.M. Accord de differentes loix de la nature qui avoient jusqu'ici couple impomptables. *Memoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris*. 1744. April 15. P. 417-426.
80. Meiron, D.I., Baker, G.R. and Orszag, S.A. Analytic structure of vortex sheet dynamics. Part 1. Kelvin-Helmholtz instability. *J. Fluid Mech.* 1982. Vol. 114. P. 283-298.
81. Meleshko, V.V., Aref, H. A bibliography of Vortex Dynamics 1858-1956. *Advances in Applied Mechanics*. 2006. Vol. 41. P. 197--292. DOI: 10.1016/S0065-2156(06)41003-6
82. Miura, A. Self-Organization in the Two-dimensional Kelvin-Helmholtz Instability. *Physical Review Letters*. 1999. Vol. 83, No. 8. P. 1586-1589.

83. Mofakham A. A., Ahmadi G. Particles dispersion and deposition in homogeneous turbulent flows using continuous random walk models. *Phys. Fluids*. 2019. Vol. 31. P. 083301. doi.org/10.1063/1.5095629.
84. Navier C.L.M.H. Memoire sur les lois du mouvement des fluids. *Memoires de l' Academie Royale des Science de l' Institut de France*. 1823. Vol. 6. P. 389-440.
85. Nayfen A.H. and Saric W.S. Non-linear Kelvin-Helmholtz instability. *J. Fluid Mech*. 1971. Vol. 46, part 2. P. 209-231.
86. Overveld van T.J.J.M., Breugem W.P., Clerx H.J.H., Duran- Matute M. Effect of the Stokes boundary layer on the dynamics of particle pairs in an oscillating flow. *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34. - P. 113306. Doi.org/10.1063/5.0115487
87. Pellone S., Di Stefano C.A., Rasmus A.M., Kuranz C.C., and Johnsen E. Vortex-sheet modeling of hydrodynamic instabilities produced by an oblique shock interacting with a perturbed interface in the HED regime. *Phys. Plasmas*. 2021. Vol. 28. 022303. [DOI:10.1063/5.0029247](https://doi.org/10.1063/5.0029247)
88. Pohlhausen K. Zur Waherungsweisen Integration der Laminaren Reibungsschicht. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1921. Vol.1. P. 252-290. doi.org/10.1002/zamm.19210010402.
89. Pozrikidis C. and Higdon J.J.L. Nonlinear Kelvin-Helmholtz instability of a finite vortex layer. *J. Fluid Mech*.1985. Vol. 157. P. 225-263.
90. Prandtl L. Uber Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlung d. III Untern. Math. Kongr. Heidelberg, Germany, 1904. P. 484-491.
91. Prandtl L. The generation of vortices in fluid of small viscosity. *Journal of the Royal Aeronautical Society*. 1927. 16 May. P. 720-740.
92. Priezjev N.V. Molecular diffusion and slip boundary conditions at smooth surfaces with periodic and random nanoscale textures. *The Journal of Chemical Physics*. 2011. Vol. 135. P. 204704. DOI: 10.1063/1.3663384.
93. Rayleigh Lord. On the Dynamics of Revolving Fluids. *Proc. Roy. A*.1917. Vol. 93. P. 148-154.
94. Reynolds O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids

and the Determination of the Criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*. 1895. Vol. 186. P. 123–164. DOI:[10.1098/rsta.1895.0004](https://doi.org/10.1098/rsta.1895.0004).

95. Richardson L.F. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbor graph. *Proc. R. Soc. London Ser. A*. 1926. No. 110. P.709–737.

96. Rott N. On the viscous core of a line vortex. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*. 1958. Vol. 9(5-6). P. 543-553.

97. Saffman P.G. *Vortex Dynamics*. Cambridge: University Press, 1992. 311 p.

98. Schlichting H., Gersten, K. *Boundary-Layer Theory*, 9th ed. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2017. 805 p.

99. Shadloo M.S. and Yildiz M. Numerical modeling of Kelvin-Helmholtz instability using smoothed particle hydrodynamics. *International Journal for numerical methods in engineering*. 2011 DOI:[10.1002/nme.3149](https://doi.org/10.1002/nme.3149).

100. Sohn S.I. An inviscid model of unsteady separated vortical flow for a moving plate. *Theor.Comput. Fluid Dyn*. 2020. Vol. 34. P.187-213. DOI:[10.1007/s00162-020-00524-0](https://doi.org/10.1007/s00162-020-00524-0)

101. Sohrab S.H. A Modified Theory of Turbulent Flow over a Flat Plate: *WSEAS Conference of Fluid Mechanics and Aerodynamics: proc. of the 5th IASME* , Athens, Greece, 2007. 10p.

102. Solano D. , Xu L. and Alben. S. Long-time simulations of vortex sheet dynamics. <https://lsa.umich.edu/>dam>Daniel>

103. Song L., Lukianov P.V., Badakh V.M., Tarasenko T.V. The effect of partial slip on the surface pressure distribution in a slightly compressible flow development region in the boundary layer. *Problems of Friction and Wear*. 2024. Vol. 3(104). P. 54-64.

104. Sowersby L. The unsteady motion of a solid of a viscous fluid inside an infinite channel. *Phil. Mag.* 1951. Vol. 42 (7). P. 176-187.

105. Sowersby L., Cooke J.C. The flow of fluids along corners and edges. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1953. Vol. 6. P. 50-70. [doi.org/10.1093/qjmam/6.1.50](https://doi.org/10.1093/qjmam/6.1.50).

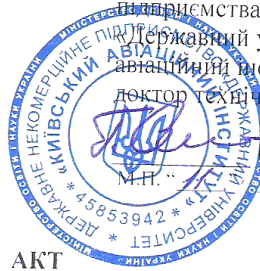


106. Stern M.E. Horizontal Entrainment and Detrainment in Large-Scale Eddies. *J.Phys. Ocean.* 1987. Vol. 17, No. 9. P. 1688-1695.
107. Stokes G.G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1845. Vol. 8. P. 287-305.
108. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1851. Vol. 9. P. 1-86.
109. Tyvand P. A. Viscous Rankine vortices. *Phys. Fluids.* 2022. Vol. 34, 073603. DOI:10.1063/5.0090143
110. Watson E.J. Boundary layer growth. *Proc. R. Soc. Lond . A.* 1955. Vol. 231. P. 104-116. doi.org/10.1098/rspa.1955.0159.
111. Weyburne D. A mathematical description of the fluid boundary layer. *Applied Mathematics and Computation.* 2006. Vol. 175. P. 1675-1684. doi.org/10.1016/j.amc.2005.09.012.
112. Weyburne D. New thickness and shape parameters for the boundary layer velocity profile. *Experimental Thermal and Fluid Science.* 2014. Vol. 54. P. 22--28.

“ПОГОДЖЕНО”  
Проректор з навчальної роботи

  
Анатолій ПОЛУХІН  
“ 11 ” “ 11 ” 2024 р.

“ЗАТВЕРДЖУЮ”  
Проректор з наукових досліджень та трансферу технологій  
Державного некомерційного підприємства  
Державний університет «Київський авіаційний інститут»  
доктор технічних наук, професор



Сергій ГНАТЮК  
М.П. “ 11 ” “ 11 ” 2024 р.

**АКТ**

про впровадження дисертаційної роботи “Моделювання та розрахунок процесів обтікання просторових тіл зі складною геометрією поверхні” у навчально-виховний процес Державного некомерційного підприємства «Державний університет «Київський авіаційний інститут»


Результати дисертаційної роботи Сун Лінь за темою “Моделювання та розрахунок процесів обтікання просторових тіл зі складною геометрією поверхні”

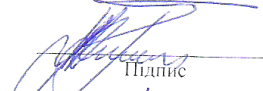
Комісія у складі :

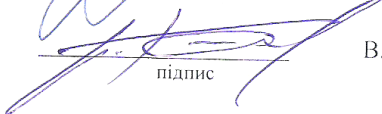
Голова комісії	ПІБ Свирид Михайло Миколайович	Ступінь, звання, займана посада к.т.н., доцент, заступник декана
Члени :	Терещенко Юрій Матвійович Бадах Валерій Миколайович Семінівська Таїсія Олексіївна	д.т.н. , професор, завідувач кафедри к.т.н., с.н.с., завідувач кафедри к.т.н., доцент, доцент кафедри АД і БП

яка діє на підставі розпорядженням декана Аерокосмічного факультету Національного авіаційного університету від « 06 » « 11 » 2024 р. № 42 \_\_\_\_\_, засвідчує, що результати дисертаційної роботи Сун Лінь за темою “*Моделювання та розрахунок процесів обтікання просторових тіл зі складною геометрією поверхні*” впроваджені у навчальний процес кафедри гідрогазових систем та конструкцій ЛА у

Лабораторному практикуму з курсу « Моделювання та розрахунок робочих процесів в рідинно-газових системах ЛА».

Голова комісії   
Підпис М.М..Свирид

Члени комісії:   
Підпис Ю. М. Терещенко

  
Підпис В.М. Бадах



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНЕ НЕКОМЕРЦІЙНЕ ПІДПРИЄМСТВО  
«ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«КИЇВСЬКИЙ АВІАЦІЙНИЙ ІНСТИТУТ» (КАІ)  
АЕРОКОСМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

03058, м Київ, просп. Любомира Гузара, 1  
Тел. (044) 406-74-10 E-mail: akf@npp.nau.edu.ua

№. від. 2024 № 08/62

На № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

**ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ\***

Результати дисертаційного дослідження *аспіранта Сун Лін* на тему: *“Моделювання та розрахунок процесів обтікання просторових тіл зі складною геометрією поверхні”* на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 134 – *Авіаційна та ракетно-космічна техніка* впроваджені в діяльності кафедри *гідро газових систем Аерокосмічного факультету Державного некомерційного підприємства “Державний університет “Київський авіаційний інститут”*.

Зокрема, під час розробки завдання на курсовий проект магістрів 1-го року навчання дисципліни *“Методи оптимізації в проектуванні авіаційної техніки”* (україномовний та англійськомовний проекти) використано аналітичні матеріали статей щодо моделювання та розрахунку нестационарного прилежового шару (журнал АКТТ, № 3 2023) та області розвитку течії в прилежовому шарі (журнал АКТТ, № 6 2023).

В.о. декана  
Аерокосмічного факультету  
КАІ

Святослав ЮЦКЕВИЧ