

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНЕ НЕКОМЕРЦІЙНЕ ПІДПРИЄМСТВО «ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«КИЇВСЬКИЙ АВІАЦІЙНИЙ ІНСТИТУТ»

ДИСЕРТАЦІЙНА РОБОТА
МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ
АВІАЦІЙНОЇ ТА РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Павлова Катерина Сергіївна

УДК 629.735.064.3, 532.542

ДИСЕРТАЦІЯ
Моделювання фізичних процесів в системах керування авіаційної та ракетно-
космічної техніки

спеціальність 134 Авіаційна та ракетно-космічна техніка

Галузь знань 13 Механічна інженерія

Подається на здобуття наукового ступіня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ К.С. Павлова

Науковий керівник Лук'янов Павло Володимирович, кандидат фізико-
математичних наук, старший науковий співробітник

Київ – 2025

АНОТАЦІЯ

Павлова Катерина Сергіївна. Моделювання фізичних процесів в системах керування авіаційної та ракетно-космічної техніки. -- Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 134 «Авіаційна та ракетно-космічна техніка».

Дисертаційна робота присвячена вивченню нестационарних процесів руху рідини в гідравлічній системі літаків і вертольотів, а також інших процесів, таких як керування випуском та прибирання шасі літака та його закритками.

За допомогою теоретичних фізико-математичних методів, отримали подальший розвиток існуючі моделі нестационарної течії рідини та процесів керування літаком, а також розроблені принципово нові моделі щодо нестационарної течії бульбашкової рідини та взаємодії цієї течії зі структурою.

У вступі зазначено актуальність обраної тематики дисертаційної роботи, визначені об'єкт та предмет дослідження, сформульована мета дослідження та поставлені відповідні до цієї мети завдання дослідження. Крім того, вказано на методи дослідження, що використані в даній роботі, обгрунтовано достовірність отриманих результатів, вказано на їх наукову новизну та практичне значення. Окремо зазначені: зв'язок роботи із науковими програмами, планами, темами, особистий внесок здобувача, та апробація результатів дослідження.

У першому розділі наведено критичний огляд літературних джерел згідно із тематикою роботи

У другому розділі розглянуто математичну модель, що описує процес керування закритками малих літаків з використанням в авіації гідравлічного, електрогідравлічного та електромеханічного приводів. Шляхом аналізу джерел, що наявні у відкритому доступі, вказується на недоліки (фізично не обгрунтовані спрощення моделі) в фізико-математичному моделюванні процесів первинного контролю польотом літака (літального апарату взагалі).

Так, зокрема, зазначено неправомірне спрощення при опису кінематики руху системи шток-закрилок. Вказаний недолік слугував основою для вдосконалення існуючої моделі. Успіхи в розвитку математики як науки, та особливо аналітичних методів розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем, дозволяють сьогодні розв'язувати велику кількість задач в аналітичному вигляді. Як підтвердження щойно зазначеного, в даній роботі представлено аналітичний розв'язок, що відповідає нелінійній динаміці взаємо пов'язаного руху штоку електромеханічного приводу та крила літака. Слід також зазначити, що в роботі використовується сучасний підхід (реологічні співвідношення) щодо моделювання тертя, що виникає в перші моменти руху електрогідравлічного та електромеханічного приводів. Якщо раніше, починаючи із часів більш ніж півстоліття тому, в моделях використовувався спрощений підхід (кулонівське тертя), то в сучасних дослідженнях світового рівня використовується більш точний опис – модель тертя Штрибека. В якості результатів, представлено також чисельний розрахунок руху системи шток-закрилок. Крім зазначеного, окремим результатом роботи є отримання, на підставі методів варіаційного числення, оптимального керування штоком електромеханічного приводу. Оптимальність полягає у тому, що знайдений аналітичний розв'язок відповідає мінімальній енергії, яка необхідна для здійснення процесу випуску крила. Так, для значення кута повороту пів радіану (30^0) витрати енергії вчетверо менші за ті, що відповідають сталому навантаженню на штоці. В роботі наводиться порівняння із існуючими даними, яке вказує на правильність отриманих результатів. Всі отримані в даній роботі результати можна використати на практиці – для поліпшення процесу первинного контролю польотом малих літаків, а також тих, які конструктивно відповідають розглянутій моделі. Далі в роботі показано, що рух штоку гідроциліндру описується тим самим розв'язком, що має місце (один із) при гідроударі. Звідси випливає логічний висновок про важливість вивчення нестационарних течій типу гідравлічного імпульсу в гідравлічних системах літаків і вертольотів.

У третьому розділі, першому підрозділі, розглянуті нестационарні течії рідини в трубопроводах, що є частиною конструкції літаків та вертольотів. Під такою назвою розуміється, перше за все, явище різкого підвищення тиску в трубопроводі, яке відоме як гідравлічний удар. Хоча вже навчилися боротися з цим явищем в окремих частинах систем, але у багатьох елементах конструкцій (гнучкі трубопроводи), всередині яких робочій тиск сягає кількохсот атмосфер, це явище ще й досі є доволі небезпечним. Найкращий спосіб боротьби із небажаним явищем, як відомо, є його теоретичне вивчення. На сьогоднішній день наявна величезна кількість робіт в напрямку досліджень гідравлічного удару. Дана робота не ставить за мету повне охоплення цих робіт. В ній обмежується посиланням на оглядові та відповідні роботи. Оскільки явище гідравлічного удару має суттєво нелінійний характер, то донедавна були невідомі аналітичні розв'язки систем рівнянь, що відповідають найпростішим моделям. У даній роботі представлено, у якості огляду, вже відомі аналітичні розв'язки, що описують процес поширення ударної хвилі, і, головне, наведено нові здобутки, як для нев'язкого наближення, так і з урахуванням внутрішнього в'язкого тертя. Показано, що внутрішнє тертя, в рамках розглянутої моделі, є незначним майже усюди, окрім тонкого ударного шару. Асимптотика пропорційна функції тангенса і обернено пропорційна кореню квадратному із добутку числа Рейнольдса та безрозмірного параметра, що характеризує ефект конвекції. В той же час конвекція поля швидкості істотно впливає на розподіли характеристик у гідравлічному ударі. Якщо автомодельні розв'язки, що були отримані раніше, мають степеневий характер розподілу швидкості в ударній хвилі, то одночасне врахування в моделі конвекції і тертя на стінках трубопроводу (за моделлю Вейсбаха—Дарсі) дало змогу отримати розподіл у вигляді експоненціальної функції, що спадає зі зростанням відстані від фронту ударної хвилі. Крім того, в роботі здійснено оригінальний підхід щодо розв'язання нелінійної системи диференціальних рівнянь, що описує поширення ударної хвилі без урахування тертя на стінках. Отримані аналітичні розв'язки у вигляді функції тиску від швидкості поширення ударної хвилі.

У другому підрозділі третього розділу розглянуто явище гідравлічного удару в рідині, яка містить незначну за об'ємом частину бульбашок газу. Історично це явище почалося вивчатися як динаміка бульбашок газу (рівняння Релея-Плесета). І сьогодні, завдяки прогресу у комп'ютерній техніці, це явище вивчається на рівні деформації бульбашки при проходженні гідравлічного удару. Інший підхід представляє собою розгляд динаміки багатофазного (двофазного) середовища у вигляді бульбашкової рідини. Після низки припущень, основним із яких є відносно малий вміст газу в рідині, модель складається з двох диференціальних рівнянь відносно швидкості поширення ударної хвилі та збурень тиску, які виникають внаслідок цього. У зазначеній системі рівнянь є відмінність від відповідних класичних рівнянь гідроудару: вони враховують конвекцію поля швидкості. Крім того, враховується тертя рідини о стінку за моделлю Вейсбаха-Дарсі. Зважаючи на невеликий вміст бульбашок газу, тертя Вейсбаха-Дарсі апроксимується так само як і в однорідній рідині, тобто в певному сенсі більшим ніж реальне. Може тому, лише за невеликих значень безрозмірного параметру, що відповідає за вміст бульбашок в рідині, отримуються більш-менш фізичні результати. Йдеться про несуперечність припущень и результатів, які отримуються на їх підставі. Так у передній області ударного імпульсу, де відбувається підвищення тиску, радіальна швидкість у бульбашок є від'ємною, але за відносно великих значень параметра тертя максимум збурень тиску переміщується з центру ударного імпульсу. І це протирічить припущенню про стиснення: після проходження максимуму тиску відбувається розширення бульбашок газу – за рахунок зменшення тиску. Отримані в роботі графічні залежності порівняні із результатами, що стосуються однорідної рідини. Вони узгоджуються, але ударний імпульс в бульбашковій рідині не такий концентрований у просторі як у однорідній. Його протяжність у 10-12 разів перевищує відповідне значення у однорідній рідині.

У четвертому розділі даної роботи розроблена нелінійна модель взаємодії нестационарної течії рідини зі структурою та знайдені аналітичні

розв'язки системи рівнянь, яка відповідає зазначеній моделі. Вплив конвекції поля швидкості рідини вже було враховано у попередніх роботах. Ці роботи присвячені гідравлічному ударові без урахування взаємодії «рідина-структура». Дана робота розширює можливості моделювання і розглядає вже замість двох рівнянь теорії гідравлічного удару (рівняння збереження маси та кількості руху) чотири рівняння, два з яких відносяться до руху частинок твердого тіла (труби або структури). Новизною даної роботи є саме урахування в моделі, що описує взаємодію течії із структурою, конвекції поля швидкості та вплив, разом із тертям рідини о тверду стінку, на динаміку процесу поширення ударного імпульсу як у рідині так і в твердому тілі. Слід особливо відзначити, що розв'язання в цілому нелінійної системи диференціальних рівнянь здійснюється аналітичним методом, що дає змогу отримати точний (а не чисельний) розв'язок задачі. Оскільки оцінку впливу різних чинників слід здійснювати шляхом порівняння із основними складовими, в роботі отримана система безрозмірних рівнянь, яка містить шість параметрів (безрозмірних комбінацій). Двоє з цих параметрів названо на честь вчених – Дарсі та Вейсбаха (стаціонарне тертя) і Бруно (нестаціонарне тертя). Розглянуто частинні випадки загальної (повної) моделі: визначено вплив різних чинників на динаміку взаємодії течії зі структурою під час поширення ударного імпульсу.

Продовжує чеветрий розділ порівняння двох підходів, стандартного та нестандартного, для отримання аналітичного розв'язку нелінійної задачі взаємодії нестаціонарної течії (ударного імпульсу) зі структурою (пружною оболонкою, наприклад, трубою). Система рівнянь у частинних похідних, що описує зазначений процес взаємодії, розширена за рахунок урахування трьох нелінійних доданків у рівнянні збереження кількості руху в рідині. Цими доданками є конвективне прискорення, стаціонарне тертя рідини об трубу (модель Дарсі-Вейсбаха) та нестаціонарне тертя (модель Бруно-Вітковського). Перехід у рівняннях у частинних похідних до автомодельної змінної дозволяє зрештою отримати одне нелінійне диференціальне рівняння для швидкості течії рідини. Оскільки автомодельність не враховує відбиття від меж, то

застосування отриманих у роботі результатів доцільно при заданні початкових розподілів полів усіх величин для чисельного розв'язання складніших задач, де враховується відбиття та взаємодія ударних імпульсів. Наведено окремі випадки моделей, де не враховується або конвекція, або в'язкість. Обговорюються переваги та недоліки стандартного та нестандартного підходу, розглянутого у попередніх дослідженнях.

У заключному підрозділі четвертого розділу розглянуто узагальнену модель взаємодії бульбашкової течії рідини зі структурою. Отримані результати порівнюються із аналогами за більш простими моделями та із наявними даними про вплив бульбашок на можливе різке підвищення тиску.

У висновках зазначено основні наукові результати даної дисертаційної роботи та їх практичне значення

Ключові слова: літак, вертоліт, нестационарна течія, крапельна та бульбашкова (двофазна) рідина, гідравлічний удар, взаємодія течії зі структурою (конструкцією), стаціонарне та нестационарне тертя, в'язкість, напруження, деформація поверхні, втома, конвективне прискорення, електромеханічний привід, гідравлічний привід, шасі літака, первинне керування польотом, аналітична, модель, чисельна модель, система, рівняння Нав'є-Стокса

СПИСОК ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Lukianov P.V., Pavlova K.S. Unsteady flow of droplet liquid in hydraulic systems of aircrafts and helicopters: models and analytical solutions. *Aerospace technics and technology*. 2024. №. 1. P. 32-42. DOI: 10.32620/aktt.2024.1.03.
2. Lukianov P.V., Pavlova K.S. Unsteady flow in bubble liquid in hydraulic system of aircraft and helicopters. *Aerospace technics and technology*. 2024. №. 2. P. 4-14. DOI: 10.32620/aktt.2024.2.01.

3. П.В. Лук'янов, К.С. Павлова. Нелінійна динаміка в системі первинного контролю польотом. *Механіка гіроскопічних систем*. 2024. Випуск 47. С. 17-27.

4. Lukianov P.V., Pavlova K.S. Nonlinear model of interaction of unsteady fluid flow with structure in hydraulic systems of aircraft and helicopters. *Aerospace technics and technology*. 2024. №.4, P. 4-14. DOI: 10.32620/aktt.2024.4.01.

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

5. Лук'янов П.В, Бадах В.М., Бутько В.С., Павлова К.С. Рух поршня гідроциліндру під час гідроудару. *Промислова гідравліка і пневматика: матеріали XXII міжнародної наук.-техн. конф. АС ПГП, м. Київ, 17-18 листопада 2021 р. Київ, 2021. С. 48-50.*

6. Лук'янов П.В, Бадах В.М., Павлова К.С., Рубанович А.Ю. Кінематика та динаміка випуску передньої шасі літака в складних погодних умовах. *Промислова гідравліка і пневматика: матеріали XXIII міжнародної наук.-техн. конф. АС ПГП, м. Київ, 15-16 грудня 2022 р. Київ, 2022. С. 36-38.*

7. Лук'янов П.В, Павлова К.С. Поширення ударної хвилі у бульбашковій рідині. *Сучасні технології у промисловому виробництві (СТПВ-2024): матеріали XI Всеукраїнської наук.-техн. конф., м. Суми, 23-26 квітня 2024 р. Суми, 2024. С. 303-304*

8. Павлова К.С. Урахування в моделі гідравлічного удару конвекції поля швидкості. *ПОЛІТ. СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ НАУКИ: тези доповідей XXIV Міжнародної науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених, м. Київ, 2—5 квітня 2024 р. Київ, 2024. С. 181-182.*

9. Лук'янов П.В, Бадах В.М., Павлова К.С. Нелінійна модель системи первинного контролю політом «ЕМП-закрилки». *Гідромеханіка в інженерній практиці: матеріали XXVII міжнародної наук. техн. конф., м. Київ, 31 травня – 2 червня 2023 р. Київ, 2023. С. 66-68.*

10. Lukianov Pavlo, Pavlova K. Use of self-similarity to determine the initial distributions of the inknowн values on the example of the flow-structure interaction

problem. *Computer Hydromechanics*: materials of IX Intern. Conf. Kyiv, October 1—2, 2024. Kyiv, 2024. P. 107-108.

11. Павлова К.С. , Лук'янов П.В. Формування ударного імпульсу в системі бульбашкова рідина-структура. *Гідромеханіка в інженерній практиці: матеріали XXVIII міжнародної наук. техн. конф., м. Київ, 28 – 29 листопада 2024 р. Київ, 2024. С. 38-41.*

ANOTATION

Pavlova Kateryna Serhiivna. Modeling of physical processes in control systems of aviation and rocket and space technology. -- Qualifying scientific work on manuscript rights.

Dissertation for obtaining the scientific degree of Doctor of Philosophy on speciality 134 “Aviation and rocket and space technology”.

In the introduction, the relevance of the chosen topic of the dissertation work is indicated, the object and subject of the research are defined, the aim of the research is formulated, and research tasks corresponding to this aim are set. In addition, the research methods used in this work are indicated, the reliability of the obtained results is substantiated, and their scientific novelty and practical significance are indicated. Separately indicated: connection of work with scientific programs, plans, topics, personal contribution of the recipient, and approbation of research results.

The first chapter provides a critical review of the literature according to the topic of the work.

In the second chapter a mathematical model describing the flap control process of small aircraft is elaborated. The use of hydraulic, electrohydraulic and electromechanical actuators in aviation is considered. Through the analysis of publicly available sources, shortcomings (physically unsubstantiated simplifications of the model) in the physical-mathematical modeling of the processes of primary flight control of the aircraft (aircraft in general) are indicated. So, in particular, an improper simplification was indicated when describing the kinematics of the

actuator's rod – flap system motion. This shortcoming served as the basis for writing this article. Progress in the development of mathematics as a science, and especially analytical methods of solving differential equations and their systems, allow today to solve a large number of problems in an analytical form. As a confirmation of what has just been stated, this paper presents an analytical solution corresponding to the nonlinear dynamics of the interconnected motion of the electromechanical actuator rod and the aircraft flap. It should also be noted that the work uses a modern approach (rheological relations) for modeling friction that occurs in the first moments of motion of electrohydraulic and electromechanical actuators. If earlier, starting from more than half a century ago, the models used a simplified approach (Coulomb friction), then in modern world-level researches, a more accurate description is used - the Stribek friction model. As results, the numerical calculation of the motion of the rod-valve system is also presented. In addition to the said above, a separate result of the work is obtaining, based on the methods of calculus of variation, optimal control of the rod of the electromechanical actuator. Optimality consists in the fact that the analytical solution found corresponds to the minimum energy required for the flap release process. Thus, for the value of the rotation angle of half a radian (30°), the energy consumption is four times smaller than that corresponding to a constant load on the rod. The work provides a comparison with existing data, which indicates the correctness of the obtained results. All the results obtained in this work can be used in practice - to improve the process of primary flight control of small aircraft, as well as those that structurally correspond to the considered model. Further in the work, it is shown that the motion of the hydraulic cylinder rod is described by the (one of) same solution that occurs during hydraulic shock (water hammer). That results into a logical conclusion about the importance of studying unsteady flows of the hydraulic impulse type in the hydraulic systems of aircrafts and helicopters

In the third chapter, first section it is considered the unsteady flow of liquid in pipelines, which is part of the design of airplanes and helicopters. This name means, first of all, the phenomenon of a sharp increase in pressure in the pipeline, which is known as a hydraulic shock. Although we have already learned to deal with

this phenomenon in some parts of the systems, in many structural elements (flexible pipelines), inside which the working pressure reaches several hundred atmospheres, this phenomenon is still quite dangerous. As you know, the best way to deal with an unwanted phenomenon is its theoretical study. To date, there is a huge amount of work in the direction of hydraulic shock research. This work does not aim to completely cover these works. It is limited to references to review and relevant works. Since the phenomenon of hydraulic shock has a significantly nonlinear character, analytical solutions of systems of equations corresponding to the simplest models were unknown until recently. This work presents, as an overview, already known analytical solutions describing the process of shock wave propagation, and, most importantly, new achievements are given, both for the inviscid approximation and taking into account internal viscous friction. It is shown that the internal friction within the considered model is insignificant almost everywhere except for thin shock layer. The asymptotic is proportional to $\tan$ -function and revised to square root of Reynolds number and non-dimensional parameter that response for convection product. At the same time, the convection of the velocity field significantly affects the distribution of characteristics in the hydraulic shock. If the self-similar solutions that were obtained earlier have a power-law character of the velocity distribution in the shock wave, then the simultaneous consideration in the model of convection and friction on the walls of the pipeline (according to the Weisbach-Darcy model) made it possible to obtain a distribution in the form of a decaying exponential function with increasing distance from the front of the shock wave. In addition, the work includes an original approach to solving a nonlinear system of differential equations that describes the propagation of a shock wave without taking into account friction on the walls. Analytical solutions were obtained in the form of a function of pressure versus the velocity of shock wave propagation.

In the second section of third chapter the phenomenon of hydraulic shock in a liquid containing a small volume of gas bubbles is considered. Historically, this phenomenon began to be studied as a change in gas bubbles (Rayleigh-Plesset equation). And today, thanks to progress in computer technology, this phenomenon is

studied at the level of bubble deformation during hydraulic shock. Another approach is a consideration of the dynamics of a multiphase (two-phase) medium in the form of a bubbly liquid. After a number of assumptions, the main one of which is a relatively small gas content in the liquid, the model consists of two differential equations regarding the speed of shock wave propagation and pressure disturbances that arise as a result. The specified system of equations has a difference from the corresponding classical water hammer equations: they take into account the convection of the velocity field. In addition, the friction of the liquid against the wall according to the Weisbach-Darcy model is taken into account. Due to the small content of gas bubbles, the Weissbach-Darcy friction is approximated in the same way as in a homogeneous liquid, i.e., in a certain sense, greater than the real one. Maybe that's why more or less physical results are obtained only for small values of the dimensionless parameter responsible for bubble content in liquid. It is about the consistency of the assumptions and the results obtained on their basis. Thus, in the front region of the shock pulse, where the pressure increases, the radial velocity of the bubbles is negative, but at relatively large values of the friction parameter, the maximum of pressure disturbances moves from the center of the shock pulse. And this contradicts the assumption of compression: after passing the maximum pressure, gas bubbles expand due to a decrease in pressure. The graphical dependences obtained in the work are compared with the results related to a homogeneous liquid. They agree, but the shock pulse in a bubbly liquid is not as concentrated in space as in a homogeneous one. Its length is 10-12 times greater than the corresponding value in a homogeneous liquid.

In the fourth chapter it is developed a nonlinear model of the interaction of unsteady fluid flow with a structure. Analytical solutions of the system of equations that corresponds to the specified model are found. The effect of convection of the fluid velocity field was already taken into account in the previous works. These works are devoted to water hammer without taking into account the "fluid-structure" interaction. This work expands the possibilities of modeling and considers four equations instead of two equations of the theory of water hammer (equation of

conservation of mass and momentum), two of which relate to the motion of particles of a solid body (pipes or structures). The novelty of this work is the consideration in the model that describes the interaction of the flow with the structure, the convection in the velocity field and the effect, together with the friction of the liquid against the solid wall, on the dynamics of the shock pulse propagation process both in the liquid and in the solid body. It should be especially noted that the solution of the nonlinear system of differential equations as a whole is carried out by an analytical method, which makes it possible to obtain an exact (rather than numerical) solution of the problem. Since the effect of various factors should be evaluated by comparison with the main components, dimensionless equations containing six parameters (dimensionless combinations) were obtained in the work. Two of these parameters are named after scientists - Darcy and Weisbach (steady friction) and Bruno (unsteady friction). Particular cases of the general (full) model have been considered, and the effect of various factors on the dynamics of the interaction of the flow with the structure during the propagation of the shock pulse was determined.

The fourth section continues the comparison of two approaches, standard and non-standard, for obtaining an analytical solution to the nonlinear problem of the interaction of an unsteady flow (shock pulse) with a structure (an elastic shell, for example, a pipe). The system of partial differential equations describing the specified process of interaction is expanded by taking into account three nonlinear terms in the equation of conservation of momentum in the liquid. These terms are convective acceleration, stationary friction of the liquid against the pipe (Darcy-Weisbach model) and non-stationary friction (Bruno-Vitkowski model). The transition in the equations from the partial derivatives to the self-model variable ultimately allows us to obtain one nonlinear differential equation for the fluid flow rate. Since the self-similarity does not take into account the reflection from the boundaries, the application of the results obtained in the work is expedient when setting the initial distributions of fields of all magnitudes for the numerical solution of more complex problems, where the reflection and interaction of shock pulses are taken into account. Individual cases of models where either convection or viscosity are not taken into

account are given. Advantages and disadvantages of the standard and non-standard approach considered in previous studies are discussed.

In the final subsection of the fourth chapter, a generalized model of the interaction of the bubbly flow of liquid with the structure is considered. The obtained results are compared with analogues based on simpler models and with available data on the effect of bubbles on a possible sharp increase in pressure.

In the conclusions, the main scientific results of this dissertation work and their practical significance are indicated

Key words: aircraft, helicopter, unsteady flow, droplet and bubble (two-phase) liquid, water hammer, flow structure interaction, steady and unsteady friction, viscosity, stress (strain), surface deformation, fatigue, convective acceleration, electromechanical actuator, hydraulic actuator, aircraft landing gear, primary flight control, mathematical model, system, equations of Navier-Stokes

LIST OF PUBLICATIONS OF THE RECIPIENT BY THE TOPIC OF THE DISSERTATION

Publications in which the main scientific result of the dissertation were published:

1. Lukianov P.V., Pavlova K.S. Unsteady flow of droplet liquid in hydraulic systems of aircrafts and helicopters: models and analytical solutions. *Aerospace technics and technology*. 2024. №. 1. P. 32-42. DOI: 10.32620/aktt.2024.1.03.
2. Lukianov P.V., Pavlova K.S. Unsteady flow in bubble liquid in hydraulic system of aircraft and helicopters. *Aerospace technics and technology*. 2024. №. 2. P. 4-14. DOI: 10.32620/aktt.2024.2.01.
3. Lukianov P.V., Pavlova K.S. Non-linear dynamics in primary control system. *Mechanics of hyroscope systems*. 2024. Issue 47. P. 17-27.
4. Lukianov P.V., Pavlova K.S. Nonlinear model of interaction of unsteady fluid flow with structure in hydraulic systems of aircraft and helicopters. *Aerospace technics and technology*. 2024. №.4. P. 4-14. DOI: 10.32620/aktt.2024.4.01.

Publications certifying the approval of the dissertation materials:

5. Lukianov P.V, Badakh V.M., Butko V.S., Pavlova K.S. The motion of the hydraulic cylinder piston during water hammer. *Industrial hydraulics and pneumatics*: proceedings of XXII international scient.-tech. conf. AS PGP. Kyiv, 17-18 November 2021. Kyiv, 2021. P. 48-50.

6. Lukianov P.V, Badakh V.M., Pavlova K.S., Rubanovych A.Yu. Kinematics and dynamics of the release of the front landing gear of the aircraft in difficult weather conditions. *Industrial hydraulics and pneumatics*: proceedings of XXIII international scient.-tech. conf. AS PGP. Kyiv, 15-16 December 2022 . Kyiv, 2022. p. 36-38.

7. Lukianov P.V, Pavlova K.S. Shock wave propogation in bubble liquid. Sumy 2024. *Modern technologies in indusetrrial production (MTIP-2024)*: proceedings of XI All-Ukrainian scient.-tech. conf. Sumy, 23-26 April 2024. Sumy, 2024. P. 303-304.

8. Pavlova K.S. Taking into account the convection of the velocity field in the water hammer model. *POLIT. Challenges of science today*: the proceeding of XXIV International scient.-prac. conf. of young scientists . Kyiv, 2—5 April 2024. Kyiv, 2024. P. 181-182.

9. Lukianov P.V, Badakh V.M., Butko V.S., Pavlova K.S. Non-linear model of primary flight control “EMU-flaps” system. *Hydromechanics in engineering practice*: proceedings of XXVII international scient. Tech. Conf. Kyiv, 31 May – 2 June 2023. Kyiv, 2023. P. 66-68.

10. Lukianov Pavlo, Pavlova K. Use of self-similarity to determine the initial distributions of the inkknown values on the example of the flow-structure interaction problem. *Computer Hydromechanscs*: materials of IX Intern. Conf. Kyiv, October 1—2, 2024. Kyiv, 2024. P. 107-108.

11. Pavlova K.S., Lukianov P.V. The formation of a shock pulse in the bubble liquid – structure system. *Hydromechanics in engineering practice*: proceedings of XXVIII international scient. Tech. Conf. Kyiv, 28 – 29 November 2024. Kyiv, 2024. P. 38-41.

ЗМІСТ

Анотація	2
Anotation	9
Вступ	18
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ІСНУЮЧОГО МАТЕРІАЛУ ЗА ТЕМАТИКОЮ	
1.1. Кінематика та динаміка випускання та прибирання шасі літака	23
1.2. Система первинного контролю польотом малого літака	26
1.3. Нестационарна течія рідини (гідравлічний удар)	31
1.4. Нестационарна течія в бульбашковій рідині	35
1.5. Взаємодія нестационарної течії зі структурою в гідравлічній системі літаків і вертольотів	38
1.6. Стандартний та нестандартний підходи у моделі взаємодії нестационарного течії з пружною оболонкою	41
РОЗДІЛ 2. НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА В СИСТЕМІ ПЕРВИННОГО КОНТРОЛЮ ЛІТАКА	
2.1. Нелінійна модель кінематики та динаміки випуску передньої шасі літака в складних погодних умовах	44
2.2. Урахування нелінійності в кінематиці моделі системи первинного контролю закрилками	46
2.3. Аналітичний розв'язок повного лінійного рівняння гідроприводу з об'ємним регулюванням	61
2.4. Гідроудар в гідроприводі: рух поршня гідроциліндру під час гідроудару..	63
РОЗДІЛ 3. МОДЕЛЮВАННЯ ФОРМУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕЧІЇ РІДИНИ В ГІДРАВЛІЧНІЙ СИСТЕМІ ЛІТАКІВ І ВЕРТОЛЬОТІВ	
3.1. Однорідна крапельна рідина	
3.1.1. Модель гідравлічного удару, яка враховує конвекцію поля швидкості	67
3.1.2. Урахування стаціонарного тертя в моделі гідравлічного удару	74
3.1.3. Вплив стаціонарного тертя на загальну картину поширення ударної хвилі	76
3.2. Бульбашкова рідина	

3.2.1. Математична модель нестационарної течії крапельної рідини за наявності в ній невеликої фракції бульбашок газу	81
3.2.2. Виведення безрозмірних рівнянь у автомодельних змінних	84
3.2.3. Поширення ударної хвилі в бульбашковій рідині без урахування тертя о стінки	86
3.2.4. Урахування тертя о стінку труби	92
3.2.5. Порівняльний аналіз розв'язків для однорідної та бульбашкової рідин: вплив наявності бульбашок на поширення ударної хвилі	95
РОЗДІЛ 4. НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕЧІЇ РІДИНИ ЗІ СТРУКТУРОЮ В ГІДРАВЛІЧНИХ СИСТЕМАХ ЛІТАКІВ І ВЕРТОЛЬОТІВ	
4.1. Автомодельний розв'язок лінійної моделі взаємодії нестационарної течії рідини із пружною оболонкою	100
4.2. Узагальнена модель взаємодії течії зі структурою: урахування конвекції, стаціонарного та нестационарного тертя	103
4.3. Формування ударного імпульсу: автомодельні рівняння та їх розв'язки	107
4.4. Вплив конвекції та тертя на взаємодію нестационарної течії зі структурою	111
4.5. Порівняння стандартного та нестандартного підходів врахування конвекції, стаціонарного та нестационарного тертя у моделі взаємодії нестационарної течії з пружною оболонкою	117
4.6. Особливості формування ударного імпульсу у бульбашковій рідині з урахуванням взаємодії нестационарної течії зі структурою.....	129
ВИСНОВКИ	137
Список використаних джерел	141
Додатки	154

Вступ

Науково-технічний прогрес виявляється у постійному підвищенні технічних вимог до систем керування літальних апаратів (авіаційної та ракетно-космічної техніки). Технічний прогрес у авіаційній галузі неодмінно пов'язаний із збільшенням злітної маси та швидкості польоту літаків. Разом із цим підвищуються вимоги до безпеки. Як наслідок, задача керування повітряним судном значно ускладнюється.

Сучасні літальні апарати (літаки і вертольоти) являють собою дуже складні системи. Складність полягає, перш за все, у тому, що фізичні процеси, які відбуваються всередині цих систем під час їх роботи, ще не вивчені повною мірою. Головною перешкодою на цьому шляху є розробка повної адекватної фізико-математичної моделі фізичного процесу. Ця повнота пов'язана із нелінійністю рівнянь, що описують процеси. Загальний підхід, що базується на спрощенні (лінеаризації) математичної задачі обмежує можливості керування фізичним процесом, або просто кажучи рухом літального апарату.

Серед найважливіших систем сучасного літака є система первинного контролю польотом, система прибирання та випускання шасі літака. Як і в системі керування механізацією крила, так і в шасі, гідропривід відіграє одну з ключових функцій. Критичний аналіз існуючих джерел вказує, що по-перше, нелінійні процеси апроксимують лінійними математичними моделями; по-друге, навіть лінійні моделі і математичні задачі, які їм відповідають, розв'язуються чисельно. Як наслідок, проміжок часу, що необхідний для якісного керування ЛА, є значно більшим ніж той, що можна досягнути шляхом використання аналітичного розв'язку задачі.

Під час роботи гідроприводу генеруються нестационарні течії, найважливішою з яких є ударний імпульс. Цей факт став вирішальним для обрання об'єкту досліджень даної роботи.

Об'єктом дослідження даної роботи стала нестационарна течія (однорідної) крапельної рідини та бульбашкової рідини, яка виникає в процесі роботи систем керування літака, а також взаємодія вказаних течій із структурою. Підставою для

цього слугували результати моделювання фізичних процесів випуску-прибирання шасі, криловок та кореляція між законом руху об'ємного гідроприводу із законом поширення ударного імпульсу (гідродар) в рідині.

Предметом досліджень даної роботи є розробка математичних моделей, що описують процес прибирання-випускання шасі літака, руху поршня об'ємного гідроприводу та нестационарної течії в однорідній та бульбашковій рідинах, які виникають під час роботи систем керування літака, а також взаємодія нестационарної течії однорідної та бульбашкової ріддини із структурою -- твердою деформованою поверхнею

Основною метою досліджень даної роботи було розробка нових і вдосконалення існуючих моделей процесу прибирання та випускання шасі літака, процесу первинного контролю (криловок) літака та фізичний процес формування та поширення ударного імпульсу в однорідній та бульбашковій рідинах – як без урахування взаємодії зі структурою так із урахуванням.

Для досягнення цієї мети були поставлені такі завдання:

- здійснити узагальнений критичний аналіз літературних джерел у зазначеній в меті області;
- удосконалити модель первинного контролю літака (крилками);
- удосконалити моделі випускання та прибирання шасі літака;
- розробити модель формування ударного імпульсу в крапельній (однорідній) рідині з урахуванням ефектів конвекції та стаціонарного тертя;
- розробити модель формування ударного імпульсу в бульбашковій рідині з урахуванням ефектів конвекції та стаціонарного тертя;
- удосконалити модель взаємодії нестационарної течії рідини зі структурою під час формування та поширення ударного імпульсу;
- розробити модель взаємодії нестационарної течії бульбашкової рідини зі структурою під час формування та поширення ударного імпульсу;

Методи досліджень. В роботі головним чином використовуються

аналітичні методи: перетворення диференціальних рівнянь у частинних похідних до автомодельних рівнянь, метод фазової площини, що застосовується до розв'язання автономних систем диференціальних рівнянь, а також стандартні методи точного та наближеного (метод Рунге-Кутти 4-го порядку точності) розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем.

Достовірність отриманих результатів підтверджується застосуванням апробованих методик та методів дослідження. Отримані нові наукові результати порівнюються із відомими результатами – теоретичними та експериментальними.

Наукова новизна отриманих результатів

вперше

обґрунтовано важливість сукупного врахування конвекції та стаціонарного тертя залежність молекулярної в'язкості в моделі нестаціонарної течії (гідравлічний удар) крапельної рідини;

розроблено аналітичну модель, що дозволяє описувати формування та поширення ударного імпульсу в бульбашковій рідині із урахуванням конвекції та тертя;

отримано аналітичну функціональну залежність поля тиску від швидкості поширення ударного імпульсу – як для моделі крапельної так і бульбашкової рідини;

розроблено аналітичну модель, що описує взаємодію нестаціонарної течії бульбашкової рідини зі структурою; модель є цілком оригінальною, так як вперше, для даної задачі, застосовано перехід до автомодельної змінної;

удосконалено

модель взаємодії нестаціонарної течії крапельної рідини зі структурою (твердим деформованим тілом, всередині якого тече рідина); удосконалення полягає в оригінальному підході – переходу до автомодельної змінної та отримання автомодельного рівняння разом із його розв'язком;

математичну модель процесу випускання та прибирання шасі літака;

математичну модель роботи об'ємного гідроприводу;

математичну модель первинного контролю закрилками літака, зокрема обґрунтовано важливість нелінійного зв'язку між рухом штоку та кутом повороту закрилком.

отримали подальший розвиток:

теорія гідравлічного удару у крапельній рідині, зокрема вказано на важливість урахування конвекції та в'язкості при описі зазначеного фізичного процесу;

теорія гідравлічного удару у бульбашковій рідині, зокрема здійснено перехід від спрощеної лінійної моделі до більш повної, яка враховує нелінійні ефекти конвекції та тертя;

теорія взаємодії нестационарної течії крапельної та бульбашкової рідини зі структурою, зокрема враховані разом конвекція поля швидкості, стаціонарне та нестационарне тертя.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота пов'язана з планами науково-дослідної роботи та навчальної роботи і відповідає тематичній спрямованості наукових розробок, що здійснювалися у КАІ, зокрема на кафедрі Гідро газових систем, а саме в рамках науково-дослідних робіт: у 2023-2024 роках “Дослідження фізичних процесів в гідравлічних і пневматичних пристроях та елементах конструкцій рідинно-газових систем літальних апаратів” (Державний реєстраційний номер 0122U201453).

Практичне значення.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що вироблене розуміння важливості урахування в моделях нестационарних течій рідини (гідравлічний удар) сумісного використання ефектів конвекції та тертя. Крім того, показано, що вказані ефекти також важливі для опису так званої бульбашкової рідини, яка відповідає реальній робочій рідині, що функціонує у рідинних системах літаків і вертольотів. Ще одним практичним значенням є те, що рух поршню гідроциліндра описується одним із можливих видів нестационарної течії рідини, що вказує на взаємозв'язок зазначених явищ.

Отримані нелінійні моделі взаємодії нестационарного руху рідини (ударний імпульс), при їх урахуванні в моделях первинного контролю літака, неодмінно покращать точність керування при польоті. Практично важливим є отриманий результат про те, що рух закрилка та штока привода не описується лінійними співвідношеннями, бо при кутах повороту закрилка близьких до пів радіану вже суттєва ця не лінійність.

Результати дисертації можуть бути використані в авіа будівництві при проектуванні гідравлічних систем літаків та вертольотів, систем керування механізацією крила та інших систем, де моделювання фізичних процесів ще є далеко недосконалим, про що свідчать доповіді провідних фахівців ДП «Антонов» -- похибка керування інколи сягає 9 градусів.

Особистий внесок здобувача визначається такими положеннями.

Основні результати, ідеї досліджень, концепція роботи, принципи розв'язання задач.

Апробація результатів досліджень. Найважливіші ідеї, висновки, рекомендації, отримані в дисертації, оприлюднені на наукових та науково-практичних конференціях, у тому числі міжнародних, всеукраїнських із міжнародною участю: “Гідроаеромеханіка в інженерній практиці” (Київ, 2023, 2024), “Промислова гідравліка і пневматика” (м. Київ, 2021, 2022), (Київ, 2024), “Computer Hydromechanics” (Kyiv, 2024), Polit. Challenge of science today (2024), Суми. Сучасні технології у промисловому виробництві (СТПВ-2024).

Наукові статті за темою дисертації. Основні результати дисертації представлено у 4 наукових статтях (разом із науковим керівником), опублікованих у журналах, що входять до переліку фахових видань зі спеціальності 134, категорія «Б», категорія «Б», 7 тезах доповідей на науково-технічних конференціях.

Структура роботи. Робота складається із анотацій українською та англійською мовою, вступу, чотирьох розділів, одного додатку та списку використаних джерел із 127 джерел на 13 сторінках. Основну частину роботи викладено на 123 стор., 22 рис.

Розділ 1. ОГЛЯД ІСНУЮЧОГО МАТЕРІАЛУ ЗА ТЕМАТИКОЮ

1.1. Кінематика та динаміка випускання та прибирання шасі літака.

Моделювання та розрахунок кінематичних та динамічних характеристик процесу випуску та прибирання шасі пасажирського літака раніше здійснювалось на підставі апарату теоретичної механіки з розрахунком лише екстремальних зусиль, та пов'язаних із ними характеристик. Утім ретельний аналіз механічної задачі показав, що характеристики процесів прибирання та випуску шасі можна отримувати у кожному мить. Це стало можливим після виведення диференціального рівняння процесу [12] (див. далі). За своєю природою воно нагадує рівняння фізичного маятника. Отримані інтеграли цього рівняння, що дають аналітичну залежність кута повороту шасі та часу, що необхідний для цього, а також залежності тиску в гідроциліндрі від кута повороту стійки шасі.

На рис. 1.1. представлено схему, на якій зображені основні сили, що діють на бічне шасі [12]:

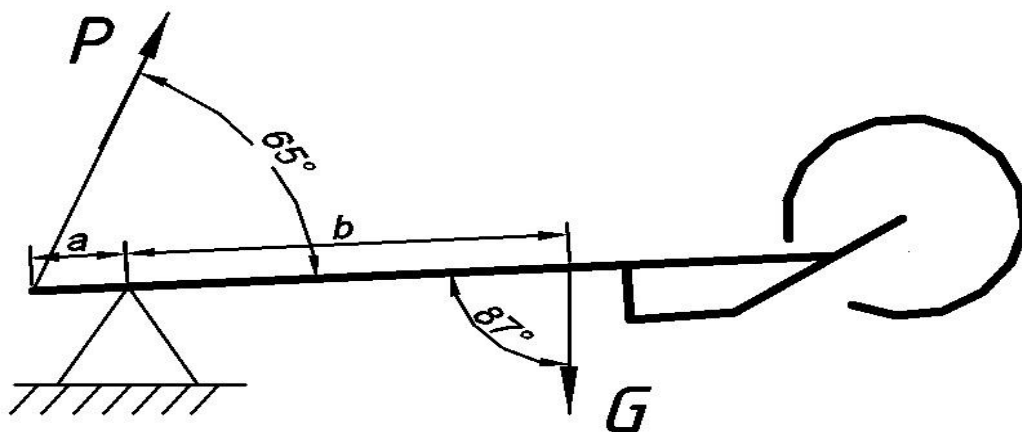


Рис.1.1. Схема сил, що діють на бічне шасі.

Сили, що діють на систему.

1. Сила тиску поршня гідроциліндра (вона може бути як сталою так і змінною під час випускання та підйому шасі)
2. Сила ваги – стала.

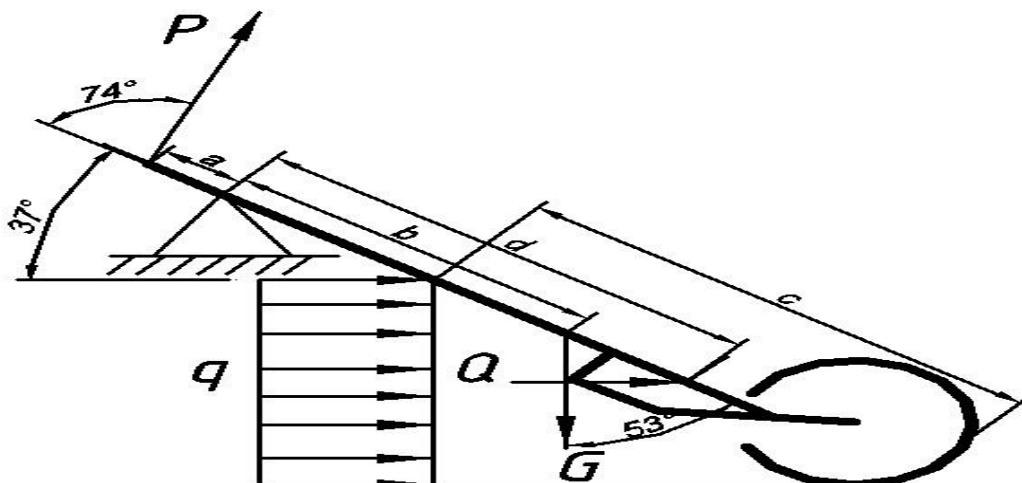


Рис. 1.2. Схема сил, що діють на переднє шасі.

3. Сила опору повітря : для передньої шасі залежить від часу (кута повороту), а для основної шасі можна вважати сталою у часі.

$$F_{on} = D \cdot V_n^2. \quad (1.1)$$

Нормальна складова швидкості v (див. рис. 1.1)

$$V_H = V_3 \cdot \sin \varphi. \quad (1.2)$$

Сума складових швидкості літака та повітря є:

$$V_H = V_L + V_n$$

Враховуючи (1.1) та (1.2) і коефіцієнт опору D , остаточно, сила опору повітря має такий вигляд [12]:

$$F_{on} = D \cdot V_3^2 \sin^2 \varphi. \quad (1.3)$$

4. Сила інерції: якщо прискорення рівне нулю, то сила інерції відсутня.

Лише коли кутова швидкість є змінною під час процесу

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \neq 0,$$

то силу інерції ми повинні також враховувати.

Диференціальне рівняння руху шасі при нестационарному процесі

Коли йдеться про обертання твердого тіла навколо нерухомої вісі, то слід застосовувати відповідну теорему із теоретичної механіки про зміну

кінетичного моменту: зміна у часі кінетичного моменту дорівнює головному вектору моментів усіх зовнішніх сил, що прикладені до тіла. Отже:

$$\vec{M}e = \vec{F} \times \vec{r}, \quad \vec{L} = m \cdot \vec{V} \times \vec{r}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}e. \quad (1.4)$$

Для плоско паралельного руху векторне рівняння (1.4) спрощується до одного скалярного. Кінетичний момент у такому русі є

$$L = J \cdot \omega \quad (1.5)$$

В (1.5) L, J, ω -- кінетичний момент, момент інерції (відносно осі обертання) та кутова швидкість. Враховуючи сили, що діють на стійку шасі, а також вираз (1.5) для кінетичного моменту, диференціальне рівняння стійки шасі руху таке:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = P \cdot a \cdot \sin(\varphi + \varphi_1) + G \cdot b \cdot \sin(\varphi + \varphi_2) + D \cdot V_3^2 \sin^2 \varphi. \quad (1.6)$$

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = P \cdot a(\cos \varphi_1 \sin \varphi + \sin \varphi_1 \cos \varphi) + D \cdot V_3^2 \sin^2 \varphi + G \cdot b(\cos \varphi_2 \sin \varphi + \sin \varphi_2 \cos \varphi).$$

Рівняння (1.6) вдається аналітично розв'язати. Його розв'язки такі [12]:

$$\int_{\varphi(t)}^{\varphi(t)} (E \cdot \xi - 2 \cdot A \cos \xi + 2 \cdot B \cdot \sin \xi - E \sin 2\xi / 2 + C_1)^{-1} d\xi - t - C_2 = 0;$$

$$- \int_{\varphi(t)}^{\varphi(t)} (E \cdot \xi - 2 \cdot A \cos \xi + 2 \cdot B \cdot \sin \xi - E \sin 2\xi / 2 + C_1)^{-1} d\xi - t - C_2 = 0;$$

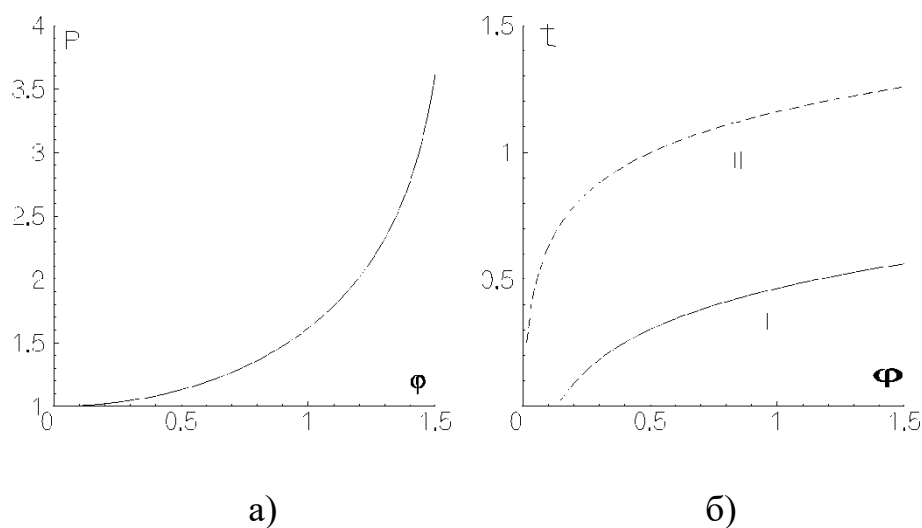


Рис. 1.3. а) Залежність тиску в гідроциліндрі від кута повороту шасі; б) залежність часу, що необхідний для повороту шасі на заданий кут [11].

Далі в даній роботі представлено подальший розвиток даної моделі -- коли спостерігаються несприятливі погодні умови (див. розділ 2.1)

1.2. Система первинного контролю політом малого літака

Розвиток авіації пов'язаний із збільшенням швидкості літака. Як наслідок, швидкодія та точність управління системою первинного контролю польоту також збільшується. Незважаючи на значний прогрес у розвитку комп'ютерної техніки, зазначені характеристики (швидкість та точність управління) знаходяться у прямій залежності від математичних моделей, які використовуються для опису зазначеного процесу.

Попередні кілька десятиліть охарактеризувалися в авіації поступовим переходом від механічних до електромеханічних систем управління [10,25,105]. В даний час, поряд з гідравлічними, в авіації використовуються також електрогідростатичні та електромеханічні приводи. У роботах [20,23,95] наведено математичні моделі цих приводів. Ретельний фізичний та математичний аналіз цих моделей дозволив виявити їхні слабкі місця (недоліки). У відповідному розділі розглядається електромеханічний привід та його використання у системі управління крилками (первинне керування польотом). Йтиметься про недоліки моделі, що описує функціонування системи електромеханічний привід – крилки. Таким недоліком є невиправдана лінеаризація математичної моделі та, як наслідок, втрата точності управління [98]. Іншим спрощенням є лінеаризація кінематики та, як наслідок, динаміки руху крилокрила [20,23,95].

Нарешті, третім слабким місцем є використання для опису функціонування електромеханічного приводу моделі тертя Штрібека, яка, як показали дослідження, трактується по-різному (неоднозначно): функціональна залежність коефіцієнта тертя від безрозмірного параметра (числа Херсі) апроксимується різними авторами по-різному. Причина такого розмаїття пояснюється складністю кількісних вимірів у широкому діапазоні зміни числа Херсі [61], і це призвело до ситуації, коли у більшості джерел крива Штрібека дається без вказівок на кількісні співвідношення. Тому не дивно, що в сучасних

моделях електромеханічного приводу тертя описується формальною вказівкою на його характер (тертя Штрібека).

Оскільки мала авіація, а також особливо безпілотна мала авіація, має неабияке значення у сучасному житті, тому дослідження щодо вдосконалення систем первинного контролю літака є актуальними.

Огляд літератури почнемо роботами з тертя. Робота [61] присвячена законам тертя мастила в горизонтальних опорних підшипниках. Як вказує Херсі, занадто короткі підшипники схильні до абразії (механічних пошкоджень) внаслідок тертя. З іншого боку, надто довгі підшипники спричиняють непотрібну дисипацію енергії. На статтю Херсі вказано у роботі [60], де коефіцієнт тертя розглядається як функція числа Херсі

$$\mu = \mu\left(\frac{\eta N}{P}\right), \quad (1.7)$$

де в дужках безрозмірна комбінація (добуток динамічної в'язкості η на частоту N , що ділиться на тиск P). Робота [59], зокрема, вказує на технічні складності отримання явної залежності коефіцієнта тертя від числа Херсі протягом майже ста років – до середини початку 2000-х. Модель тертя, що використовується у сучасних дослідженнях, це модель Штрібека [30,48,66]. Ця модель дозволяє враховувати широкий діапазон робочих (operating) умов. Спочатку модель розроблялася для підшипників, але у наш час використовується і в інших видах контактної геометрії [59].

Позитивна сторона моделі Штрібека, тобто її широкий діапазон використання, обумовила складність її кількісного опису: однозначного універсального закону у вигляді аналітичної функції поки ще не існує. У доступних джерелах можна знайти два близьких (схожих) закони.

Перший [48]:

$$F = \sqrt{2e} \cdot (F_{br} - F_C) \cdot \exp\left[-\left(\frac{V}{V_{St}}\right)^2\right] \cdot \frac{V}{V_{St}} + F_C \tanh\left(\frac{V}{V_{Coul}}\right) + f \cdot V \quad (1.8)$$

Другий [48]:

$$F_{p,s} = F_C \left[(F_{br} - F_C) \cdot \exp \left(-\frac{V_{piston}}{V_L} \right) + k_V |V_{piston}| \right] \quad (1.9)$$

Основною особливістю кривої Штрібека є наявність, крім області сухого тертя (Кулона) при малих швидкостях, перехідної області, що відповідає збільшенню (обертальної швидкості) числа Херсі. У зазначеній області коефіцієнт тертя як функція числа Херсі різко зменшується (приблизно в 8 разів). При подальшому збільшенні обертальної швидкості (частоти обертання і числа Херсі з урахуванням сталості в'язкості і тиску) коефіцієнт тертя знову збільшується. Але його значення набагато менше, ніж передбачає модель тертя Ньютона. Отже, третя область суто гідродинамічного тертя має описуватися неньютонівською моделлю.

Що стосується тертя, то тут також заслуговує на увагу робота [30], присвячена практичному методу врахування прокладочного тертя при попередньому конструюванні авіаційного гідроприводу. У роботі, зокрема вказується на вирішальну (головну) роль прокладочного тертя у питанні точності положення спільної динаміки гідроприводу. Крім цього, прокладки - найбільш вразлива частина приводу в сенсі зношування та розриву.

Досить простий підхід, заснований на понятті граничного циклу у разі нестійкої поведінки системи, розглянуто у роботі [81]. Автори роботи розглянули модель тертя Штрібека, яка складається з маси, пружини та в'язкого демпфера (рідина). З розглянутих п'яти параметрів (довжина замкнутого контуру, площа, ступінь колоподібності, ступінь субтильності, множник форми) лише ступінь круглості відрізняється на 11,7%. Всі інші не перевищують 2,5%.

Розглянемо тепер інформацію, що міститься в сучасних роботах стосовно звичайного гідроприводу. Це робота [4], в якій розглянуто гідропривід із пружинним дозуванням рідини. Також робота [94], науковий внесок якої полягає у: 1) розробці реалістичної нелінійної моделі гідравлічного приводу

імітатора польоту повітряного судна; 2) належного вибору вхідного збурення, заснованого на властивостях системи та її динаміці; 3) експериментальному підтвердженні. Автоматична система управління положенням лінійного гідравлічного приводу, що використовується в авіаційних пристроях, розглянута у роботі [64]. Заслуговує на увагу ще одна робота з гідроприводу [72]. У ній представлено уніфіковану стратегію управління для приводів контролю польотом. Нині виникла тенденція до використання вбудованого всередині крила гідравлічного приводу [51]. Управлінню стійкістю системи приводу для цивільної авіації присвячена робота [65].

Огляд робіт з електрогідравлічного приводу почнемо з недавньої статті [78], яку присвячено огляду електро-гідростатичного приводу, розглянуті питання конфігурації, конструювання та технологій контролю ID, представляє інтерес розділ 4. При розгляді ЕГДП на кону два питання: 1) точність математичної моделі та 2) ефективність стратегії управління (контролю). Непрямому надійному керуванню гідравлічними маніпуляторами з точними оцінками параметрів присвячено роботу [90]. Вивченню питання відмови в роботі гідростатичного приводу приділено увагу в [46]. Питання конструювання та експериментальної оцінки надійності контролера позиції електро-гідростатичного приводу розглянути в [76]. Цим темам присвячені, зокрема, роботи [125], а також роботи з моделювання [87], [82], моделювання та ідентифікації електрогідростатичного приводу [36]. Ілюстрації прототипного інтегрованого приводу з електричним живленням у літальних апаратах цивільного призначення можна знайти у роботі [49]. Конструкціям зазначеного типу пристроїв присвячено роботу [103], Питанням керування електрогідравлічного приводу присвячено роботи [54], [70].

Що до питання контролю (управління) електро-гідравлічним приводом, то тут слід відзначити патент [44] і роботу [55]. Надалі у цій роботі будуть використані, крім інших, матеріали статті [53], в якій докладно розглянуті моделі електро-гідростатичних сервоприводів. Оскільки будь-яка математична модель так чи інакше використовує конкретні параметри, то в цьому зв'язку

представляє інтерес робота [45]. Крім цього, робота [36], в якій розглянуто питання моделювання та ідентифікації електрогідравлічного приводу.

Огляд електромеханічних приводів, мабуть, слід почати з оглядової роботи [98], у якій розглянуто всебічні аспекти електричних систем літальних апаратів. Центральною роботою, цитованою в [98], та використаною в даній роботі є стаття [48], в якій розглянуто взаємозв'язок електро-гідростатичного та електромеханічного приводу з поверхнею управління (закрилки - передкрилки).

Синхронізація руху для серво-гідроприводу/електромеханічного приводу гібридної системи приводу шляхом використання оптимізаційного алгоритму розглянута у статті [100]. Моделювання та ідентифікація електромеханічного приводу із зазначенням конструктивних параметрів присвячена робота [58]. Питання інновацій в керуванні польотом електромеханічними приводами та системами розглянуті в роботі [47]. У системі керування є так звані мертві зони, у яких управління системою неможливо. Для цього використовують внутрішньоконтурне керування [58]. Ця робота може бути використана при подоланні проблем зазначеного характеру під час використання одержаної в цій роботі моделі. Гарною підмогою, у зв'язку з цим, є експериментальні дані, які використовуються як у номінальних, так і відмовних умовах [35].

Моделі, що дозволяють проводити попереднє конструювання електромеханічних приводів, розглянуті в [40]. У зв'язку з щойно наведеною роботою, важливе значення щодо спокійним до відмови управлінням для систем первинного контролю польотом має [34].

Нарешті, огляд робіт завершимо тематикою керування. Система керування передкрилками та закрилками розглянута у роботах [5], [6]. Так у [5] йдеться про створення адекватної динамічної моделі, тоді як спрощеній моделі присвячена робота [6]. Крім контрольних поверхонь, електропривод також використовується у кермовому управлінні. Математичні моделі рульових приводів літальних апаратів розглянуті в [7]. Питанням верифікації та підтвердження теоретичної моделі пакету інтегрування для первинного

контролю польотом присвячено роботу [64]. Питанням конструювання контролерів на електрогідравлічних приводах присвячена робота [80]. Аналітичний підхід до керування системою лінійного гідравлічного приводу розглянуто в [31].

1.3. Нестационарна течія рідини (гідравлічний удар).

Явище нестационарності течії рідини, яке призводить до утворення ударної хвилі, має місце при швидкостях польоту близьких до швидкості звуку [9] та більших за швидкість звуку [28]. При проектуванні гідравлічної та інших систем літаків та вертольотів слід враховувати той факт, що під час польоту в елементах конструкцій, якими є як відносно жорсткі так і гнучкі трубопроводи, може виникнути небажане явище гідроудару. З гідродинамічної точки зору це по суті нестационарна течія крапельної рідини у замкненому об'ємі.

Вже наприкінці 60-х -- початку 70-х років минулого століття в авіації почали застосовуватись дуже високі робочі тиски: 200-300 атм. Так при робочому тиску у 200 атм., при гідроударі спостерігались підвищення аж до 350 атм. [24]. Тому в роботі [17] була розглянута нелінійна модель поширення ударної хвилі. В цій моделі, на відміну від [24], вже враховано нелінійний механізм тертя рідини о стінку труби. Але подальші теоретичні дослідження явища гідравлічного удару в двофазній рідині виявило деякі розбіжності у підходах щодо моделювання. Це зумовило (стало генератором) даної роботи.

У 1860-ті роки Ріману вдалося показати, що існує особливий розв'язок системи газотермо-динамічних рівнянь. Цей розв'язок не належить до класу загальних або частинних розв'язків. Натомість він являє собою розрив функцій тиску, густини і швидкості середовища, тобто миттєвий стрибок параметрів, який не має ширини.

Пізніше, у 1885-87 роках з'явилися роботи [89-90], присвячені гідравлічному удару. Але значну увагу наукової спільноти привернули роботи Жуковського [68] та Аллієві [33].

У своїй теорії Аллієві увів у розгляд швидкість поширення ударної хвилі a [33]:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\omega}{g} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{E} \frac{D}{e} \right). \quad (1.10)$$

В формулі (1.10) $E, \varepsilon, D, e, \omega$ означають відповідно модуль пружності труби, модуль пружності рідини, діаметр трубопроводу, товщину трубопроводу, густину рідини. Для відносно тонких труб швидкість тонких сталевих труб швидкість поширення ударної хвилі дорівнює приблизно 600-700 м/с. А для відносно товстих труб її значення досягає 1200-1300 м/с.

Оскільки швидкість звуку c у воді змінюється у межах $1403 < c < 1555$ м/с, то це означає, що, у пружній оболонці ударна хвиля поширюється зі швидкістю, меншою за швидкість звуку у рідині.

Згідно із Аллієві, тиск у вигляді стовпа та швидкість поширення ударної хвилі описуються такими співвідношеннями [33]:

$$y = y_0 + F + f \quad (1.11)$$

$$V = V_0 + F - \frac{g}{a}(F - f). \quad (1.12)$$

При цьому аргументи функцій такі, що

$$F = F\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad f = f\left(t + \frac{x}{a}\right). \quad (1.13)$$

Із виразів (1.13) випливає простий висновок: обидві функції будуть мати сталі значення якщо їх аргументи будуть константами. А це можливо за умов поширення прямої і протилежної ударних хвиль зі швидкістю a . Наведені дані вже мають, як показано далі, своє значення, оскільки вказують на форму вибору автомоделі змінної.

В своїх теоретичних дослідженнях Жуковський [68] посилається на роботу Рімана [102], де показано загальну структуру розв'язку відповідно до (1.13). Слід зазначити, що в моделі, яку розглядав Жуковський, конвективним доданком в рівнянні збереження кількості руху (імпульсу) не знехтувано. Річ у тім, що задачі, які розглядав Аллієві та інші наприкінці 19 століття, були

присвячені трубопроводам – довгим трубам. Тому масштаб довжини був таким, що дозволив Аллієві знехтувати конвективним доданком. Натомість гідроудар в елементах конструкцій авіаційної техніки не обов'язково відбувається у дуже довгих трубопроводах. Вже понад пів століття в авіації застосовуються гнучкі з'єднання у вигляді досить коротких трубок. З іншого боку, як свідчать експерименти (візьмемо хоча б ту ж роботу Жуковського [68]), ударна хвиля практично затухає на відстані порядку десяти діаметрів труби. Отже, нехтувати подовжнім градієнтом течії неможна. Наприкінці короткого огляду роботи Жуковського слід зазначити, що в ній наведені форми розподілу швидкості, які мають схожість на функцію квадратного кореня від координати. Саме таку форму має один із розв'язків, який отримано далі в даній роботі.

Не зважаючи на значну кількість робіт в теорії гідравлічного удару [58], наділимо увазі ті, що продовжили розвиток ідей Аллієві та Жуковського. Так, відносно нещодавно отримано аналітичний розв'язок системи [73]

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{a^2 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{4R} V|V| - g \sin(\varphi) = 0, \quad (1.15)$$

де x, t -- напрямок поширення хвилі і час; V, p -- швидкість і тиск в рідині, ρ, c, λ -- відповідно густина рідини, швидкість поширення звуку в ній та коефіцієнт тертя.; R -- гідравлічний радіус, прискорення вільного падіння та φ - кут нахилу трубопроводу до горизонту.

В моделі, що описується рівняннями (1.14—1.15), вже враховано вплив тертя на поширення ударної хвилі. В ньому застосовується гідравлічне наближення – модель в'язкого тертя Вейсбаха-Дарсі [50], [117].

Розв'язком системи (1.14—1.15) є [73]:

$$V(x, t) = C^{-1} \tanh\left(\arctan h V_0 C - xD\right), \quad p(x, t) = \frac{P_0}{V_0} V(x, t),$$

$$\text{де} \quad C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{Rg \sin \varphi}}, \quad D = \frac{p_0 \rho V_0}{2(c \rho^3 V_0^2 - p_0^2)} \sqrt{\frac{g \sin \varphi \lambda}{R}}.$$

В роботі [17] також отримані три типи автомодельних розв'язків системи (1.14—1.15) у випадку горизонтального трубопроводу.

Автомодельний розв'язок першого вигляду:

$$V(\eta) = \tanh \left[\frac{\sqrt{C_1(a^2 - 1)} a / 2 (\eta + C_2)}{a^2 - 1} \right] \sqrt{2C_1(a^2 - 1)} / a / \theta.$$

Автомодельний розв'язок другого вигляду:

$$V(\eta) = \frac{(1 - a^2)V_0}{1 - a^2 + aV_0\eta}. \quad (1.16)$$

Автомодельний розв'язок третього вигляду:

$$V(\eta) = \frac{(2a - 1)(1 + a^2)}{\eta^{1-\alpha} + C_1(1 + a^2)(2a - 1)\eta^\alpha}. \quad (1.17)$$

Крім того, в [17] отримано аналітичний розв'язок задачі, який у безрозмірних координатах (позначених рискою зверху) має вигляд:

$$\bar{V}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{2(C_3^2 - C_2^2) \tanh[C_1 + C_2\bar{x} + C_3\bar{t}]}{C_3\theta}.$$

Цікавим є той факт, що частинні розв'язки (1.16)–(1.17) дозволяють отримати розривні функції, що узгоджується із [106], [109] (див. [17], рис. 1). Інші ж розв'язки мають форму розмитого стрибка із затуханням швидкості з віддаленням від цього стрибка (див. [58], рис. 2а). Як показано далі, цей результат є близьким до отриманого в даній роботі розв'язку з урахуванням

конвективного доданку. Отже, врахування тертя рідини о стінку призводить до розмивання профілю швидкості. Крім того, профіль ударної хвилі може мати не лише плавний характер (гіперболічний тангенс), але і вигляд різкого, майже миттєвого зростання, яке змінюється на спадання. Все це свідчить про різноманітність та фізичну непросту природу явища гідравлічного удару (нестаціонарна течія) в крапельній рідині.

1.4. Нестаціонарна течія в бульбашковій рідині.

Під час руху рідини в гідравлічній системі літаків і вертольотів відбувається явище кавітації, яке призводить до виникнення в рідині бульбашок газу. Оскільки ущільнення не є абсолютними, то в область майже нульового абсолютного тиску потрапляє повітря, яке розчиняється всередині крапельної рідини. Багатофазний потік в гідравлічних системах дуже сильно впливає на правильну роботу гідравлічних систем [97]. Зменшується модуль пружності [122] робочої рідини, погіршуються характеристики статичної і динамічної орсткості рульових приводів. Погіршується швидкість реакції рульових приводів та точність позиціонування. При нормальному атмосферному тиску і температурі 293 К в авіаційних паливах і мастилах у зрівноважених умовах [3], об'ємна частина розчиненого повітря в гасі складає від 16,2% до 20,2%, в легких мастилах – від 9,7% до 11,3%, у важких мастилах - від 7,8% до 9,2%, в бензинах – близько 25,1%. Оскільки об'єм розчиненого повітря до його насичення, пропорційний тиску, то при зменшенні тиску спостерігається процес аерації. Зниження тиску в потоці робочої рідини до граничного значення відбувається в каналах дросельних пристроїв гідравлічних систем і потік стає двофазним.

Ще однією із причин виділення бульбашок нерозчиненого повітря (парогазової суміші) є кавітація. Це барокінетичне явище, при якому розчинене повітря виділяється із потоку рідини при локальному зниженні статичного тиску до тиску початку кавітації [27].

Наявність газу у крапельній рідині, у свою чергу є небезпечним, оскільки призводить до виникнення в системі гідравлічного удару. Тож явище проходження ударного імпульсу у бульбашковій рідині представляє собою як науковий, так і практичний інтерес.

При розрахунку поширення, відбиття та інших процесів щодо ударної хвилі дуже важливо мати якомога точнішу інформацію про початковий розподіл гідродинамічних характеристик за для подальшого використання цієї інформації в чисельник обрахунках деформації поверхні та її можливої втоми. Річ у тім, що фізична природа поширення ударного імпульсу є суттєво нелінійною і це уможливорює існування різних типів руху. Отже, для вивчення потрібного типу руху слід коректно (відповідно) задати умовно початковий профіль ударного імпульсу – відповідні поле збурень тиску та швидкості поширення.

Основною особливістю поширення ударної хвилі в двофазному середовищі, що складається із рідини та газу, полягає в тому, що об'ємна маса зосереджена в рідкій фазі, в той час як стисливість середовища повністю визначається стисливістю газу в бульбашках [38]. В цитованій статті є важливі експериментальні дані для порівняння. Так у другому розділі [38] на рис. 2 є близька до лінійної залежність безрозмірної швидкості (число Маха) від нормованого значення тиску. Приблизно таку залежність, як частину експоненціальної функції отримано і в даній дисертаційній роботі (див. рис.4.3).

Робота [41] присвячена рівнянням, запропонованим в [113], а точніше тому, як ці рівняння можуть бути отримані з мікроскопічних рівнянь в особливій аналітичній границі, яка докладно розглядається. Серед інших, у математичній моделі використовуються диференціальні рівняння для зростання радіусу бульбашки. Завдання на мікроскопічному рівні формулюється в цитованій роботі на підставі низки припущень про фізичні характеристики руху рідини. 1. Центр бульбашки не рухається. 2. Бульбашки мають сферичну форму з однорідним розподілом внутрішнього тиску. 3. У явному вигляді не включені поверхневий тиск, в'язкість або теплопровідність. 4. Рідина майже стислива, має постійні щільність і швидкість звуку, а сама течія безвихрова, хоча у сучасних статтях доповідається про утворення вихрової структура в бульбашці. Продовженням досліджень [41] є робота [117]. Як зазначають у

вступі автори роботи [117], їх цікавить фізичне уточнення моделі, її особливості, як-то між фазне тертя чи взаємна взаємодія бульбашок. У той же час основний інтерес полягає в дослідженні, наскільки далеко модель математично відповідає першому порядку об'ємної концентрації газу та може пояснити поведінку бульбашкових рідин, яка спостерігається.

Лабораторний та чисельний експеримент з вивчення поширення ударної хвилі в рідині, що містить бульбашки, представлені в роботі [69]. Підставою для написання цитованої роботи стало те, що теоретичні та експериментальні результати сильно відрізнялися. Причиною цих розбіжностей, як виявилось, є значний вплив просторового розподілу бульбашок на структуру ударної хвилі. Цитована робота вказує на те, що теоретичні результати відповідають рівномірному розподілу бульбашок у об'ємі рідини. У той час як у багатьох експериментах ця умова не виконувалася: бульбашки заповнювали об'єм хаотичним чином, далеко неоднорідно.

Більш конкретні дослідження з трансформації кількості руху в ударну хвилю до бульбашковій рідині викладені в роботі [56]. Наведені в цитованій роботі фотографії свідчать про досить однорідний розподіл бульбашок в об'ємі рідини, що вказує на можливість порівняння з теоретичними результатами цієї роботи.

Вивченню поширення ударної хвилі в бульбашкових рідинах присвячено також роботу [104]. Так у цитованій роботі розвинені ідеї статей [41,69]. Але автори пішли далі – вони вже врахували тепломасообмін між рідиною та бульбашкою. Рівняння енергії для газу всередині бульбашки розв'язано аналітично. Результати чисельного експерименту з ослаблення осциляцій позаду фронту ударної хвилі, що отримані в роботі, добре узгоджуються з [69].

Містить всебічний фізичний опис процесу проходження ударної хвилі в рідині з бульбашками газу відносно рання стаття [38]. Основною спрямованістю досліджень у зазначеній статті є фізичний аналіз насичення ударної хвилі в залежності від об'ємної концентрації бульбашок.

Експериментальні дослідження динаміки та структури хвиль тиску помірної інтенсивності в рідині з бульбашками газу одного або двох розмірів у широкому діапазоні хвиль, а також дослідження поведінки бульбашки газу при проходженні хвилі – все це представлено у роботі [50].

Проходження ударної хвилі крізь рідину зі значним (10%) об'ємним вмістом бульбашок газу вивчено чисельно у роботі [52]. Особливу увагу там приділено між бульбашковим взаємодіям та деформації бульбашки.

До спроб аналітичного опису ударної хвилі в рідині з бульбашками газу слід віднести роботу [75]. У ній, зокрема, проходження ударної хвилі моделюється за допомогою рівняння Кордевега-де-Фріза-Бюргерса. Цікавим моментом є запровадження ефективної в'язкості. Якщо поєднати сучасні дані про молекулярну в'язкість у примежовому шарі, то стане зрозуміло, що в'язкість дійсно залежатиме від розмірів бульбашок.

Ще однією з перших теоретичних робіт з вивчення ударних хвиль у рідинах з бульбашками є стаття [113]. Дослідження в статті, що цитується, в основному базуються на рівняннях, що описують радіус бульбашки. У цій статті є посилання на доповідь [42], в якій встановлено співвідношення збереження маси та кількості руху поперек ударної хвилі.

Квазіоднорідна модель Цвіка [127] використана для вивчення довгохвильових збурень у газо-рідинній суміші з малим об'ємним вмістом газу в роботі [92].

Експериментальному дослідженню утворення ударної хвилі шляхом збільшення крутості хвиль стиснення присвячено роботу [96].

1.5. Взаємодія нестационарної течії зі структурою в гідравлічній системі літаків і вертольотів.

Явище гідравлічного удару тісно пов'язане з такими поняттями як напруження, деформації поверхні трубопроводу, які виникають під дією цих напружень і приводять до втоми та руйнування матеріалу. Це, в свою чергу, впливає на безпеку польоту. Сучасні роботи вже беруть до уваги двовимірність

та турбулентну природу течії [109], пружну деформацію поверхні трубопроводу [29], а також явище кавітації [116], яке виникає в цьому випадку. Врешті решт все це призводить до втомних руйнувань поверхні трубопроводу [77], що є неприпустимим в системах авіаційної та ракетно-космічної технології.

В роботах класиків з гідравлічного удару [33] і [68] розглядається нестационарна течія рідини у пружній оболонці, отже лише односторонній вплив пружності труби на поширення ударної хвилі в рідині. Взаємне поширення ударних хвиль у рідині і твердому тілі розглянуто в [106-107], де виведено систему чотирьох рівнянь, які описують взаємодію течії зі структурою. Автор [106-107] знайшов розв'язки, що відповідають бездисперсійним хвилям, які поширюються із двома різними швидкостями – в трубі та в рідині. Загального розв'язку системи чотирьох рівнянь ним знайдено не було.

Точний розв'язок лінійної гіперболічної системи чотирьох рівнянь був знайдений в роботі [110]. Автору [110] вдалося знайти чотири значення швидкості – два додатних і два від'ємних. При цьому використовувався загальновідомий метод характеристик. У даному разі йдеться лише про повздовжній рух твердого тіла, а розв'язки для бічного (lateral) та крутного (torsional) рухів [120] так і не були розглянуті в [110]. Аналітичний розв'язок за тією ж моделлю із урахуванням ефекту Пуасону та з'єднань отримано в роботі [79].

В роботах [17, 83, 84] показана важливість урахування конвективного прискорення та стаціонарного тертя в моделі гідравлічного удару. До речі, в [33] враховується конвективне прискорення.

При проходженні гідравлічного удару, та і для нестационарної течії в цілому, слід враховувати тертя між рідиною і твердою стінкою, як стаціонарне [50, 119], так і нестационарне [37, 126]. Тому має сенс розглянути нелінійну модель чотирьох рівнянь і з'ясувати вплив конвекції поля швидкості і також тертя на процес поширення ударних хвиль в рідині та структурі.

Наведений вище огляд літературних джерел вказує, що на сьогодні несталу течії рідини та її взаємодію із пружним трубопроводом описують такою системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \left(\frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = 2\nu \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = -\frac{\nu R}{Ee} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1.21)$$

В системі рівнянь (1.18)–(1.21) V, U, p, σ_z -- відповідно швидкості руху рідини і твердого тіла, збурення тиску та повздовжні напруження; t, z -- відповідно час та повздовжня координата; K, E, ν -- об'ємна жорсткість рідини, модуль Юнга та коефіцієнт Пуассону твердого тіла; ρ_f, ρ_t, R, e -- відповідно густини рідини та твердого тіла (труби), внутрішній радіус труби і її товщина.

Систему лінійних рівнянь (1.18)–(1.21) можна аналітично розв'язати, не застосовуючи метод характеристик. Про це дивіться у розділі 2. Як показали попередні дослідження, урахування конвекції поля швидкості в рідині та тертя рідини о стінку труби є суттєвим. Тому далі в роботі розглядається сучасна модель тертя [37].

1.6. Стандартний та нестандартний підходи у моделі взаємодії нестационарного течії з пружною оболонкою.

Ще сам Ріман зауважив, що нестационарна течія крапельної рідини може описуватися спеціальними типами розв'язків диференціальних рівнянь [101]. Сучасний стан розвитку технологій обчислення різних течій дозволяє чисельно розв'язувати багато задач. І все ж таки є одне «слабке місце» або недолік у цих

технологій. Оскільки течії рідини описуються нелінійними за своєю природою рівняннями, то задання в умовно початковий момент часу характеристик системи (просторовий розподіл полів швидкості в рідині і структурі (трубі), деформація труби, а також розподіл збурень тиску) має особливо важливе значення. Йдеться про так званий «ефект метелика», коли неточності або навіть невеликі відхилення у заданні початкових умов можуть призвести до зовсім іншої картини течії після певного часового інтервалу. Стосовно задачі про взаємодію нестационарної течії з пружною оболонкою, одним з різновидів задачі FSI (Flow-Structure Interaction), значні відхилення можуть накопичуватися і виявлятися після декількох характерних періодів проходження, відображення та взаємодії ударних імпульсів.

Метою даної роботи, яка викладена в розділі 4.5, є отримання, стандартним (класичним) методом додаткового диференціювання рівнянь системи з наступним виключенням невідомих величин, аналітичного розв'язку нелінійної задачі взаємодії нестационарної течії і пружної структури і порівняння цього розв'язку з розв'язком, отриманим в [85] нестандартним методом. Основну увагу буде приділено порівнянню переваг та недоліків кожного з підходів. При цьому новизна, з фізичної точки зору, полягає в спільному урахуванні в рівнянні збереження кількості руху конвективного прискорення в рідині, стаціонарного і нестационарного тертя рідини о стінки структури (труби). Всі три щойно зазначені компоненти є, з математичної точки зору, нелінійними механізмами передачі кількості руху.

Розв'язання задачі, з погляду його використання, обмежене досить малим масштабом часу: вже встигає відбутися взаємодія нестационарної течії зі структурою (трубою) та формуються взаємно-пов'язані поля розподілів швидкостей ударного імпульсу в рідині та в структурі, а також поздовжніх напружень та збурень тиску, але жоден з ударних імпульсів ще не зустрічає на своєму шляху перешкоду. Простіше кажучи, ударні імпульси протягом досить малого часового інтервалу поширюються так, якби труба була нескінченною. Такий підхід може здатися, на перший погляд, нефізичним, оскільки без

урахування тертя швидкість частинок рідини є скрізь постійною [85], [110] і вся область рухається з однією з можливих постійних швидкостей. Але це лише результат (неправильний) спрощення моделі – її лінеаризація. Як показали дослідження, та й це вже відображено в класичних роботах Аллієві [33] та Жуковського [68], енергія ударного імпульсу сконцентрована у просторі (див. рис. 1 та рис. 2 [85]). Розвиток теорії [33], [68] у задачі взаємодії нестационарної течії зі структурою отримано Скалаком [107,108]. Модель Скалака використана у роботах [110] та [79]. Однак, як показали недавні дослідження, урахування конвективного прискорення важливе [17,83] і тертям рідини об труби також не можна знехтувати [83,84]. У цьому розділі враховується не лише стаціонарне тертя Дарсі-Вейсбаха [56,119], а й нестационарне тертя за моделлю Бруно-Витковского [37,115].

У роботах [32, 71] як робоча (механічна) модель використовується тіло Кельвіна-Фойта. Нелінійність присутня в доданках, які моделюють тертя. У роботі [67] спочатку наводиться повна нелінійна, з урахуванням конвективних доданків, система рівнянь гідравлічного удару з урахуванням моделі тертя Бруно [39] та Варді-Брауна [114]. Далі це використовується для моделі миттєвого прискорення. У цій же роботі наводяться результати [126] за так званою заснованою на згортці моделі (Convolution – based model). Але аналітичний розв'язок наводиться для лінійного рівняння Нав'є-Стокса і тертя задається стандартною моделлю Н'ютона.

Вирізняється із загальної кількості робота [112], у якій зібрані аналітичні розв'язки лінійного рівняння Нав'є (1823) в циліндричних координатах. Так, при різкому закритті, з'являється область зворотної течії – поблизу стінки труби. Особливістю роботи [60] є те, що в ній розглядається пружно закріплений клапан в кінці трубопроводу. Альтернативний підхід, заснований на алгоритмі зворотної частоти, використовується в роботі [63] для моделювання нестационарної течії в гладкій трубі зі слаботурбулентною течією. У роботі [108] спочатку наводяться повні рівняння гідроудару, тобто з

урахуванням конвективних доданків, а потім ці доданки опускаються і нелінійність залишається лише в моделі тертя Дарсі-Вейсбаха.

Висновки до розділу

У даному розділі наведено огляд існуючих робіт стосовно тематики дисертації, яка представлена у розділах 2—4. Виявлено недоліки при моделюванні систем первинного контролю польотом, взаємозв'язок між процесом керування та нестационарними течіями рідини (ударний імпульс, гідроудар). Проведено критичний аналіз існуючої інформації щодо моделювання нестационарних течій однорідної та бульбашкової рідин, взаємодії цих течій зі структурою.

Розділ 2. НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА В СИСТЕМІ ПЕРВИННОГО КОНТРОЛЯ ЛІТАКА

2.1. Нелінійна модель кінематики та динаміки випуску передньої шасі літака в складних погодніх умовах

Якщо на літак, що приземлюється, діє різкий поривчастий вітер, або (а також) має місце різке обледеніння шасі, то кінематика та динаміка випуску шасі за таких умов описується узагальненим рівнянням (1.6) (див. [48] і також розділ 1.1.):

$$J(t) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = P \cdot a \cdot \sin(\varphi + \varphi_1) + G(t) \cdot b(t) \cdot \sin(\varphi + \varphi_2) + D(t) \cdot V(t)^2 \sin^2 \varphi.$$

$$J(t) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = P \cdot a (\cos \varphi_1 \sin \varphi + \sin \varphi_1 \cos \varphi) + G(t) \cdot b(t) (\cos \varphi_2 \sin \varphi + \sin \varphi_2 \cos \varphi) + D(t) \cdot V(t)^2 \sin^2 \varphi.$$

Зібравши всі коефіцієнти при функціях синус та косинус від шуканого кута та поділивши на змінний у часі але завжди ненульовий і додатний момент інерції, отримуємо таке рівняння [48]:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = A(t) \sin \varphi + B(t) \cos \varphi + E(t) \sin^2 \varphi. \quad (2.1)$$

$$\text{де } A(t) = (P \cdot a \cdot \cos \varphi_1 + G(t) \cdot b(t) \cdot \cos \varphi_2) / J(t),$$

$$B(t) = (P \cdot a \cdot \sin \varphi_1 + G(t) \cdot b(t) \cdot \sin \varphi_2) / J(t), \quad E(t) = D(t) \cdot V(t)^2 / J(t). \quad (2.2)$$

Дослідження впливу дуже швидкого налипання мокрого снігу та/або наростання крижаного шару на кінематику та динаміку випускання шасі.

Тут будемо вважати, що вітер має сталу швидкість, а от налипання снігу відбувається майже миттєво, тобто дуже швидко – масштаб часу цього процесу

одного порядку із масштабом часу процесу, що моделюється. Це призводить до збільшення, перш за все, площі опору $D(t)$. Логічно припустити, що площа опору збільшується у часі за лінійним законом:

$$D(t) = D_0(1 + \alpha t) \quad (2.3)$$

Якщо брати до уваги, що масу крижаного шару є незначною у порівнянні із масою шасі, то можна припустити, що в такому разі:

$$J(t) \approx \text{Const}; \quad b(t) \approx \text{Const}. \quad (2.4)$$

Співвідношення (2.2) вказують на те, що лише

$$E(t) = D_0(1 + \alpha t) \cdot V_3^2 / J \quad (2.5)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.1), з врахуванням припущень (2.3), (2.5), має наступний вигляд:

$$t = \int_0^{\varphi} \left((1 + \alpha t) D_0 (\xi - 1/2 \sin 2\xi) - 2A \cos \xi + 2B \sin \xi \right)^{-\frac{1}{2}} d\xi \quad (2.6)$$

Дослідження впливу різкого поривчастого вітру на кінематику та динаміку випускання шасі.

Швидкістю сильного поривчастого вітру не можна нехтувати, оскільки вона може досягати величини, порівняної із величиною швидкості приземлення літака. Для простоти, припустимо, що ця нестаціонарна складова вітру апроксимується періодичним законом:

$$V(t)_S = (1 + \beta \sin(t)) V_3 \quad (2.7)$$

Тоді коефіцієнт $E(t)$ в рівнянні (2.1), із врахуванням (2.7), прийме такий вигляд:

$$E(t) = D_0(1 + \beta \sin t)^2 \cdot V_3^2 / J. \quad (2.8)$$

Час випуску шасі як функція кута повороту має тепер вигляд:

$$t = \int_0^{\varphi} \left(-0.5D(\beta \sin t - 1)^2 \sin 2\xi + \xi D(1 + \beta \sin t)^2 - 2A \cos \xi + 2B \sin \xi + C_1 \right)^{-\frac{1}{2}} d\xi$$

Дослідження спільного впливу різкого поривчастого вітру та дуже швидкого наростання крижаного шару на кінематику та динаміку випускання шасі.

В складних погодних умовах можуть спостерігатись одночасно і різкий поривчастий вітер і майже миттєве, а точніше дуже швидке, налипання снігу або наростання крижаного шару на поверхні шасі. За таких обставин, модель буде описуватись рівнянням (2.1), за такого виразу для $E(t)$:

$$E(t) = D_0(1 + \alpha t)(1 + \beta \sin t)^2 \cdot V_3^2 / J \quad (2.9)$$

Зауважимо, що коефіцієнт $\alpha > 0$, оскільки при налипанні снігу або утворенні крижаного шару, маємо завжди збільшення площі опору. Утім, другий коефіцієнт, β , може бути як додатний (вітер проти руху літака), так і від'ємний (потрапляння літака у вир). Розв'язок (2.1) із врахуванням (2.9) має вигляд:

$$t = \int_0^{\varphi} \left(D(\beta \sin t + 1)^2 (1 + \alpha t) (\xi - \sin \xi \cos \xi) - 2A \cos \xi + 2B \sin \xi + C_1 \right)^{-\frac{1}{2}} d\xi$$

На рис. 2.1. наведено приклад розв'язання задачі, де показано вплив вітру на динаміку руху шасі. Видно, що цей вплив істотний.

2.2. Врахування нелінійності в кінематиці моделі системи первинного контролю закрилками

Метою дослідження даного розділу є виявлення впливу нелінійності в кінематиці моделі системи первинного контролю польотом, що дасть можливість поліпшити процес керування закрилками і в цілому підвищить якість керування та безпеку польотом.

Для досягнення мети були поставлені наступні задачі:

- (перша задача) розробити нелінійну модель кінематики взаємопов'язаного руху штоку електромеханічного приводу і закрилка літака;

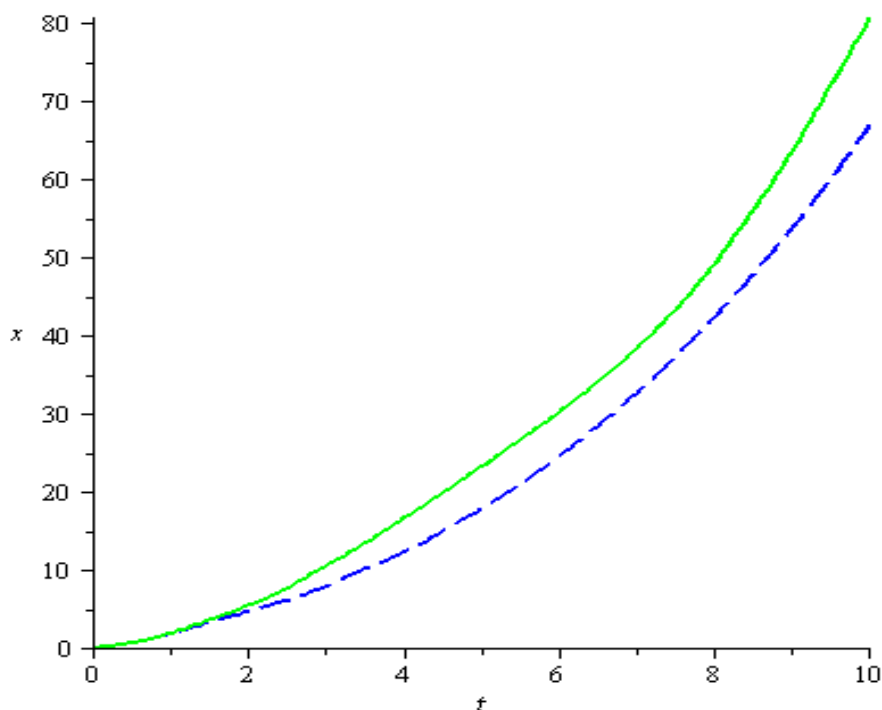


Рис.2. 1. Порівняння кута випуску шасі від часу: суцільна лінія – без сильного зустрічного вітру, нижня лінія – за наявності вітру. $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.5$

(друга задача) на підставі розв'язання першої задачі, отримати повну систему рівнянь, що описує модель динаміки ЕМП-закрилки, та результати на підставі цієї моделі і порівняти їх із існуючою моделлю, де кінематика системи шток-закрилок описується лінійною закономірністю;

- (третя задача) спробувати знайти аналітичні розв'язки, що описують процес повороту закрилок та дослідити цей процес на можливість оптимального керування.

Об'єктом дослідження є фізичний процес випускання-прибирання закрилок літака. Основним припущенням даної роботи є те, що врахуванням нелінійності в кінематичній частині моделі фізичного процесу не можна нехтувати і, отже, цю нелінійність потрібно обов'язково розглядати в моделі. В роботі не використовуються нові гіпотези або спрощення. У якості методів

дослідження використовуються суто теоретичні методи, а саме: теорія варіаційного числення, Євклідова геометрія, метод Рунге-Кутти 4-го порядку точності чисельного інтегрування диференціальних рівнянь та їх систем.

Нелінійна динаміка взаємопов'язаного руху штока електромеханічного приводу та закрилки.

Детальне дослідження існуючого моделювання, зазначеного в назві явища виявило, з одного боку, відсутність належного опису кінематичного зв'язку «зміна довжини штока – кут повороту закрилок» та, з іншого боку, врахування тимчасової мінливості навантаження на штоці та моменту зусиль, що діє на закрилки. Щоб усунути зазначені недоліки, докладно розглянемо кінематику та динаміку системи «шток-закрилок». За основу візьмемо схему, наведену у роботі [45]. Вона показана на малюнку 7 а) в [45].

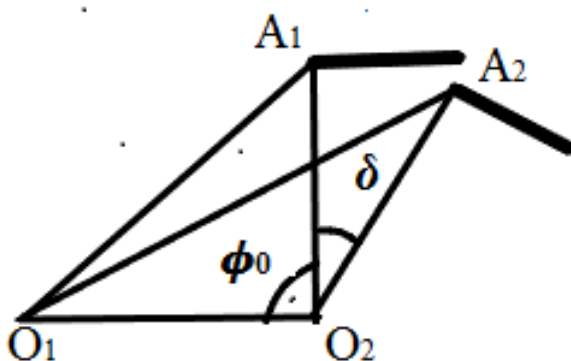


Рис. 2.2. Схема кінематики системи «шток ЄМП-закрилок»

Система має три осі обертання, які позначені точками O_1 , O_2 та $A_{1,2}$. При цьому справедливі такі співвідношення:

$$O_1O_2 = a = \text{Const}; \quad A_1B_1 = A_2B_2 = \text{Const}; \quad O_2B_1 = O_2B_2 = l_j = \text{Const}.$$

$\delta(x) = \varphi_{flap}$ -- кут повороту закрилок від початкового положення φ_0 , O_1A_1 та O_2A_2 -- довжини відстань між осями повороту O_1 та $A_i, (i=1,2)$. Довжина O_1A_1 змінюються у часі і тому позначена невідомою x . У довільний момент часу має (за теоремою косинусів) місце співвідношення:

$$\cos(\varphi_0 + \delta(x)) = \frac{a^2 + l_j^2 - (x_0 + x)^2}{2a \cdot l_j}. \quad (2.10)$$

Якщо $\varphi_0 = \pi/2$, то

$$\sin(\delta(x)) = \sin(\varphi_{flap}(x)) = \left[(x_0 + x)^2 - (a^2 + l_j^2) \right] / (2al_j). \quad (2.11)$$

Момент сили навантаження на штоку відносно осі обертання, що проходить крізь точку O_2 , дорівнює:

$$M_j = -F_L \cdot \sin \varphi_{flap}(x) l_j = -F_L \left[(x_0 + x)^2 - (a^2 + l_j^2) \right] / 2a \quad (2.12)$$

Другим є момент сили опору закрилок M_h . Для знаходження взаємозв'язку між довжиною штоку електромотору та кутом повороту закрилок, використаємо рис. 2.1. Нехай $\angle O_1O_2A_1 = \beta_0 = \pi/2 \Leftrightarrow \delta(x) = 0$. Тоді у довільний момент часу, знову ж таки, за теоремою косинусів, маємо:

$$\delta(x) = -\beta_0 + \arccos \left(\frac{a^2 + l_j^2 - \left(\sqrt{a^2 + l_j^2} - x \right)^2}{2al_j} \right). \quad (2.13)$$

Співвідношення (2.13) і являє шуканий взаємозв'язок між кутом повороту закрилка і миттєвим значенням довжини штоку. Для подальшого нам знадобляться значення першої та другої похідних кута повороту закрилок за часом. Обчисли їх.

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{a^2 + l_j^2} + x}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + l_j^2 - (\sqrt{a^2 + l_j^2} - x)^2}{2al_j} \right)^2}} \frac{dx}{dt} = F_1(x) \frac{dx}{dt}, \quad (2.14)$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = F_1(x) \frac{d^2x}{dt^2} + F_2(x) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, \quad (2.15)$$

$$\text{де } F_2(x) = \left(1 - \left(\frac{a^2 + l_j^2 - (\sqrt{a^2 + l_j^2} - x)^2}{2al_j} \right)^2 \right)^{-0.5} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + l_j^2} - x \right)^2 \left(\frac{a^2 + l_j^2 - (\sqrt{a^2 + l_j^2} - x)^2}{2al_j} \right)^2 \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + l_j^2 - (\sqrt{a^2 + l_j^2} - x)^2}{2al_j} \right)^2} \right)^{-3}$$

Отже, ми отримали співвідношення виду:

$$\delta = \delta(x), \quad \frac{d\delta}{dt} = f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad \frac{d^2\delta}{dt^2} = f_2\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Повна система рівнянь, що описує модель ЕМП-закрилки.

Перейдемо тепер до математичного формулювання задачі. Почнемо з динамічної частини задачі та застосуємо до закریлок закон зміни кінетичного моменту. Для обертання навколо осі у точці цей закон спрощується до одного скалярного рівняння

$$J \frac{d^2\delta}{dt^2} = \sum_i M_i^e, \quad (2.16)$$

M_i^e -- сума моментів зовнішніх сил, що діють на закрилок. З наведеного рівняння після підстановки виразів для моментів отримуємо наступне рівняння:

$$f_2\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) \cdot J = M_h(t) - F_L(t) \cdot l_j \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 + l_j^2 - a^2}{2l_j x}\right)^2}. \quad (2.17)$$

(2.17) - нелінійне диференціальне рівняння. Його розв'язок можна отримати лише чисельно. Якщо позначити хід штока електроприводу як $x = x_{ema}$, то відповідне рівняння має вигляд [48]

$$m_{ema} \frac{d^2 x_{ema}}{dt^2} = c_{BS} (x_{ema} - l_{hs} \varphi_G) + d_{BS} \left(\frac{dx_{ema}}{dt} - l_{hs} \frac{d\varphi_G}{dt} \right) - F_{fr,bs} + F_L(t). \quad (2.18)$$

У рівнянні (2.18) $F_{fr,bs}$ - сила тертя Штрібека (1.8--1.9). Виключаючи невідоме навантаження із попередніх двох рівнянь, отримуємо:

$$\begin{aligned} & \left[J_{Flap} \cdot F_1(x) + l_j m_{ema} \sin(\varphi_{Flap}) \right] \frac{d^2 x_{ema}}{dt^2} = -J_{Flap} \cdot F_2(x) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \\ & + l_j \sin(\varphi_{Flap}) \left[F_{BS} (x_{ema} - l_{hs} \varphi_G) + d_{BS} \left(\frac{dx_{ema}}{dt} - l_{hs} \frac{d\varphi_G}{dt} \right) + F_{fr,BS} \right] - \\ & \frac{W_d \cdot L_{Flap}^2}{2} V_0^2 \cdot \sin^2 \varphi_{Flap} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Отже, замість розгляду двох рівнянь нам достатньо використовувати в моделі лише одне -- (2.19). А навантаження на штоку ЕМП $F_L(t)$ та кут повороту закрилок $\varphi_{Flap}(t)$ отримується із наведених вище співвідношень.

Модель ЕМП містить ще чотири рівняння, що описують внутрішню фізику електро-механічної природи [48]. Модель ЕМП містить дві складові:

мотор без щіток, що працює на постійному струмі, і трансмісійну кінематику, що складається з передавальної коробки і приводу у вигляді сферичного гвинта. Для опису динаміки двигуна струм і напруга перетворюються з трифазної системи на пряму (direct) і квадратичну (quadratic) осі (d-q координати) за допомогою перетворення Парка [95] .

У якості вхідних величин є команда швидкості мотору φ_{mot} і зовнішня сила $F_{ema} = (F_L)$, що діє на привід. Вихідними сигналами є положення ЕМП, квадратичний струм I_q і кут повороту мотору φ_{mot} .

$$\frac{dI_d}{dt} = \frac{1}{L_d} (U_d - RI_d + \omega_{el} \cdot L_q \cdot I_q), \frac{dI_q}{dt} = \frac{1}{L_q} [U_q - RI_q - \omega_{el} \cdot (\Psi_{PM} + L_d \cdot I_d)] \quad (2.20)$$

де $I_{d,q}, L_{d,q}$ і $U_{d,q}$ - струм, індуктивність і напруга вздовж d або q осі відповідно; R - електричний опір двигуна, ω_{el} - кутова швидкість фізичного поля, що обертається, Ψ_{PM} - магнітний потік постійного магніту. При кількості пар полюсів Z_p кутова швидкість механічного двигуна ω_{mot} є

$$\omega_{el} = Z_p \omega_{mot} \quad (2.21)$$

Момент, що створюється електричним струмом, дорівнює

$$M_{el} = \frac{3Z_p}{2} [(L_d - L_q) \cdot I_d \cdot I_q + \Psi_{PM} \cdot I_q]. \quad (2.22)$$

У такому разі, рівняння для положення φ_M мотору (двигуна) є [11]

$$J_{mot} \frac{d^2 \varphi_{mot}}{dt^2} = M_{el} - M_{fr,mot} - M_{L,mot} \quad (2.23)$$

де J_{mot} -- момент інерції мотору, $M_{L,mot}$ -- зовнішнє навантаження, що діє

на вал мотору, і $M_{fr,mot}$ - момент сили тертя, який залежить від швидкості (тертя Штрібека).

Кінематика ЕМП описується моделлю зведеної маси. Всі частини редукційної передачі, що обертаються, з'єднання валу з мотором і сферичним гвинтом представлені наступними рівняннями обертального руху [48]

$$J_{tot} \frac{d^2 \varphi_G}{dt^2} = -M_{L,mot} - M_{fr,rot} + M_L \quad (2.24)$$

$$M_{L,rot} = C_{rot}(\varphi_G - \varphi_{mot}) + d_{rot} \left(\frac{d\varphi_G}{dt} - \frac{d\varphi_{mot}}{dt} \right). \quad (2.25)$$

В рівняннях (2.24)--(2.25) J_{rot} , C_{rot} і d_{rot} -- момент інерції, жорсткість і демпфування валу мотора і передач, які приведені до однієї маси. $M_{fr,rot}$ позначено Штрібеківське тертя, до якої входять тертя спокою (початку руху), кулонівське тертя та в'язке тертя. $M_{fr,rot}$ - навантаження, що діє на частини, що обертаються.

Передавальні відношення (числа) передавальної трансмісії i_{tr} та сферичного гвинта i_{tr} об'єднані в [48]

$$i_{ema} = i_{tr} \cdot i_{bs} = i_{tr} \frac{2\pi}{P_{bs}} \quad (2.26)$$

де P_{bs} -- хід сферичного гвинта. Поступальний рух сферичного гвинта описується подібно до частин, що обертаються [48]

$$m_{ema} \cdot \frac{d^2 x_{ema}}{dt^2} = -F_G - F_{fr,bs} + F_{ema}, \quad (2.27)$$

$$F_G = C_{bs}(x_{ema} - x_G) + d_{bs} \left(\frac{dx_{ema}}{dt} - \frac{dx_G}{dt} \right). \quad (2.28)$$

Тут F_G -- навантаження (сила) між гайкою та сферичним гвинтом, C_{bs} і d_{bs} - коефіцієнти жорсткості та демпфування між компонентами гвинтового механізму, $F_{fr,bs}$ -- сила тертя між валом гвинта та гайкою відповідно.

В трансмісійну модель також включено залежний від напрямку ккд η_{ema} , який представляє ефективність коробки передач та сферичного гвинта. Мертвий хід φ_{bl} розглядається як положення [48]

$$\varphi'_G = \begin{cases} \varphi_G, & \text{for } |\varphi_G - \varphi'_G| < \varphi_{bl}/2, \\ \varphi_G - \varphi_{bl}/2, & \text{for } (\varphi_G - \varphi'_G) \geq \varphi_{bl}/2, \\ \varphi_G + \varphi_{bl}/2, & \text{for } (\varphi_G - \varphi'_G) \leq -\varphi_{bl}/2. \end{cases} \quad (2.29)$$

Нарешті, перехід між обертальним та поступальним рухами пов'язаний співвідношеннями [48]

$$F_G = M_L \cdot i_{ema} \cdot \eta_{ema}, \quad (2.30)$$

$$\varphi'_G = x_G \cdot i_{ema} \cdot \eta_{ema}. \quad (2.31)$$

Вважається, що ЕМП контролюється швидкістю за допомогою контролеру каскадного типу з контрольним контуром вхідного струму та контуром контролю вихідної швидкості, обидва реалізовані за допомогою ПІ контролерів. Вихідне значення на контролері швидкості обмежено максимальним квадратичним струмом мотору. Вихідне значення на контролері струму обмежено максимальним квадратичним вольтажем (напругою).

Перейдемо від розмірних до безрозмірних рівнянь. Почнемо з рівняння для кута повороту крилок. Введемо такі масштаби:

$$[\varphi_F] = \varphi_{F\max} \quad - \text{максимальний кут повороту крилок,}$$

$$[F_L] = F_{L\max} \quad - \text{максимальне зусилля на штоку електромеханічного приводу,}$$

$[t]=T_0$ -- масштаб часу опускання – підйому закрилок.

Рискою «--» позначатимемо безрозмірність величин. Згідно з наведеними даними, отримуємо:

$$\frac{d^2\bar{\varphi}_F}{d\bar{t}^2} = A(t)\sin^2\bar{\varphi}_F + B(t)\sin\bar{\varphi}_F \quad (2.32)$$

$$A(t) = \frac{1}{J_F} \frac{W_d L_F^2}{4} \rho(t) V_a^2(t) [T_0^2], \quad B(t) = -\frac{F_L(t) l_j}{J_F} [T_0^2]$$

Як видно із співвідношень (2.32), зміна у часі кута повороту закрилок залежить від навантаження на штоці (множник $B(t)$), швидкості літака разом із висотою, на якій він летить (множник $A(t)$).

Наступним по порядку, обеззміримо рівняння для переміщення штока ЕМП. Представимо його у вигляді, зручному для математичного аналізу. Ним є

$$\frac{d^2\bar{x}_{ema}}{d\bar{t}^2} = \frac{A_1}{A_0} \left(\frac{d\bar{x}_{ema}}{d\bar{t}} \right)^2 + \frac{A_2}{A_0} \frac{d\bar{x}_{ema}}{d\bar{t}} + \frac{A_3}{A_0} \bar{x}_{ema} + \frac{A_4}{A_0} \frac{d\bar{\varphi}_G}{d\bar{t}} + \frac{A_5}{A_0} \bar{\varphi}_G + \frac{A_6}{A_0} \bar{f}_{fr,bs} + \frac{A_7}{A_0} \sin^2\varphi_{Flap} \quad (2.33)$$

В рівнянні (2.33) масштаб змінної t залишається тим самим, а решта масштабів виглядають так:

$$[\bar{x}_{ema}] = x_{\max} \quad [\varphi_G] = \varphi_{G\max}, \quad [f_{fr,bs}] = f_{fr,\max}, \dots$$

В рівнянні (2.33) використані такі позначення:

$$A_0 = -J_{Flap} \cdot F_1(x) + l_j \cdot m_{ema} \sin\varphi_{Flap}, \quad A_1 = -J_{Flap} \cdot F_2(x_{ema}),$$

$$A_2 = l_j d_{BS} \sin(\varphi_{Flap}), \quad A_3 = l_j F_{BS} \cdot \sin(\varphi_{Flap}), \quad A_4 = -d_{BS} l_{hs} l_j \sin(\varphi_{Flap}),$$

$$A_5 = -l_j l_{hs} \sin(\varphi_{Flap}) \quad A_6 = -l_j \sin(\varphi_{Flap}) \quad A_7 = -0.5 W_d l_{Flap}^2 V_0^2 \sin^2(\varphi_{Flap})$$

Далі, обезрозмірюємо рівняння для прямого та квадратичного струмів

$$\frac{d\bar{I}_d}{d\bar{t}} = E_1 + E_2 \bar{I}_d + E_3 \frac{d\bar{\varphi}_{mot}}{d\bar{t}} \bar{I}_q, \quad (2.34)$$

$$\frac{d\bar{I}_q}{d\bar{t}} = F_1 + F_2 \bar{I}_q + F_3 \frac{d\bar{\varphi}_{mot}}{d\bar{t}} + F_4 \bar{I}_d \frac{d\bar{\varphi}_{mot}}{d\bar{t}}. \quad (2.35)$$

Безрозмірні параметри в (2.34), (2.35) визначаються такими співвідношеннями:

$$E_1 = \frac{U_d}{L_d} \frac{T_0}{I_{d\max}}, \quad E_2 = \frac{R}{L_d} T_0, \quad E_3 = \varphi_{mot\max} \frac{L_q}{L_d} \frac{I_{q\max}}{I_{d\max}};$$

$$F_1 = \frac{U_q}{L_q} \frac{T_0}{I_{q\max}}, \quad F_2 = \frac{R}{L_q} \frac{T_0}{I_{q\max}}, \quad F_3 = \frac{\psi_{PM}}{L_q} \frac{1}{I_{q\max}}, \quad F_4 = \frac{L_d}{L_q} \frac{I_{d\max}}{I_{q\max}} \varphi_{mot\max}$$

Залишилося перетворити ще два рівняння – для кутів повороту електромотору та передачі [48]

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_{mot}}{d\bar{t}^2} = G_1 \bar{I}_d \bar{I}_q + G_2 \bar{I}_q + G_3 \bar{M}_{fr,mot} + G_4 \bar{M}_{L,mot} \quad (2.36)$$

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_G}{d\bar{t}^2} = H_1 (\bar{\varphi}_G - \bar{\varphi}_{mot}) + H_2 \left(\frac{d\bar{\varphi}_G}{d\bar{t}} - \frac{d\bar{\varphi}_{mot}}{d\bar{t}} \right) + H_3 \bar{M}_{fr,mot} + H_4 \bar{M}_L \quad (2.37)$$

Безрозмірні параметри в (2.36)--(2.37) визначаються такими співвідношеннями

$$G_1 = \frac{3}{2} Z_p \frac{(L_d - L_q) I_{d\max} I_{q\max} T_0^2}{J_{mot} \varphi_{mot\max}}, \quad G_2 = \frac{3}{2} Z_p \frac{\psi_{PM} I_{q\max} T_0^2}{J_{mot} \varphi_{mot\max}},$$

$$G_3 = \frac{M_{fr\max} T_0^2}{J_{mot} \varphi_{mot\max}}, \quad G_4 = \frac{M_{L\max} T_0^2}{J_{mot} \varphi_{mot\max}}.$$

$$H_1 = -\frac{C_{rot} T_0^2}{J_{tot} \varphi_{G\max}}, \quad H_2 = -\frac{d_{rot} T_0^2}{J_{tot} \varphi_{G\max}}, \quad H_3 = \frac{M_{fr,rot\max} T_0^2}{J_{tot} \varphi_{G\max}}, \quad H_4 = \frac{M_{L\max} T_0^2}{J_{tot} \varphi_{G\max}}$$

На рис. 2.2. наведені типові залежності у часі зміни довжини ходу штоку ЕМП *а)* та кута повороту закрилка *б)*. Порівняння графіків свідчить про нелінійну залежність $\varphi = \varphi(x(t))$. Крім того, якщо порівняти закон руху $x(t)$ з наявними результатами з інших джерел [121] (див. рис. 2.4), то стане очевидно: по-перше, якісний характер кривої на рис. 2*а)* співпадає із існуючими (перша крива на рис. 2.4) і, по-друге, графік цієї кривої має більш плавний вигляд, ніж ті, на які щойно посилялося.

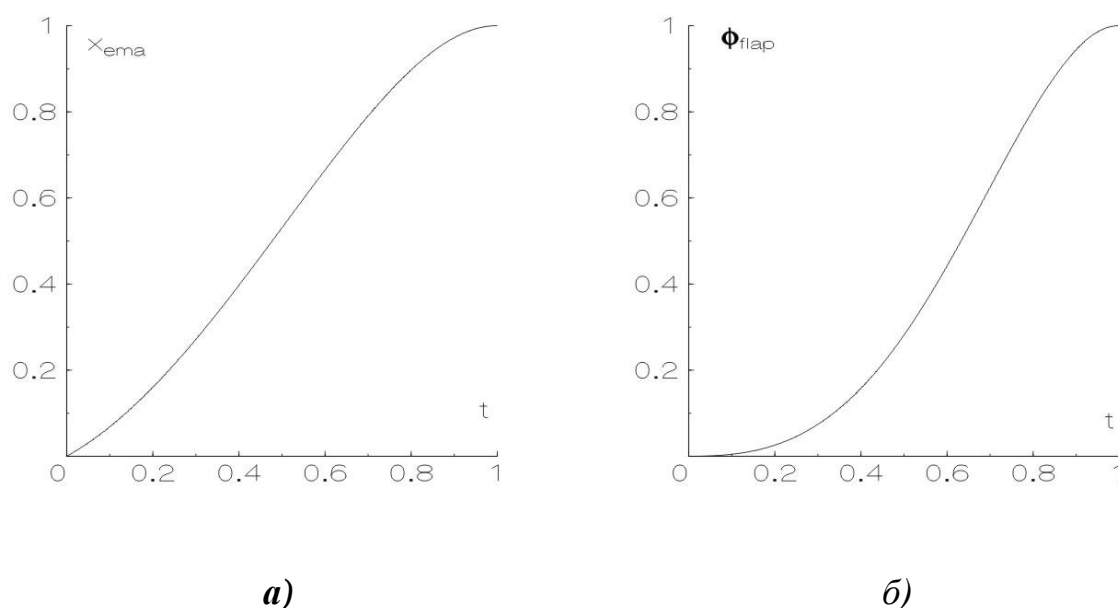


Рис 2.3 Отримані за представленою у цій роботі моделі залежності від часу : а – ходу штока електромеханічного приводу; б – кута повороту закрилок.

Аналітичний розв'язок -- окремо рівняння для кута повороту закрилок:

1. *Динаміка закрилок при сталому навантаженні на штоку, швидкості та висоті польоту.*

У цьому випадку рівняння (2.23) спрощується до

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_F}{d\bar{t}^2} = A \sin^2 \bar{\varphi}_F + B \sin \bar{\varphi}_F, \quad (2.38)$$

де в (2.38) A і B -- тепер є сталими величинами.

Рівняння (2.38) має два розв'язки

$$\bar{t}_{1,2} = \pm \int_{\phi_0}^{\phi(\bar{t})} \frac{d\xi}{\sqrt{C_1 - 2A \cos \xi - B \sin \xi \cos \xi + B \xi}} - C_2. \quad (2.39)$$

Знак плюс означає підйом закрилок, а мінус - опускання. Сформулюємо складніше завдання.

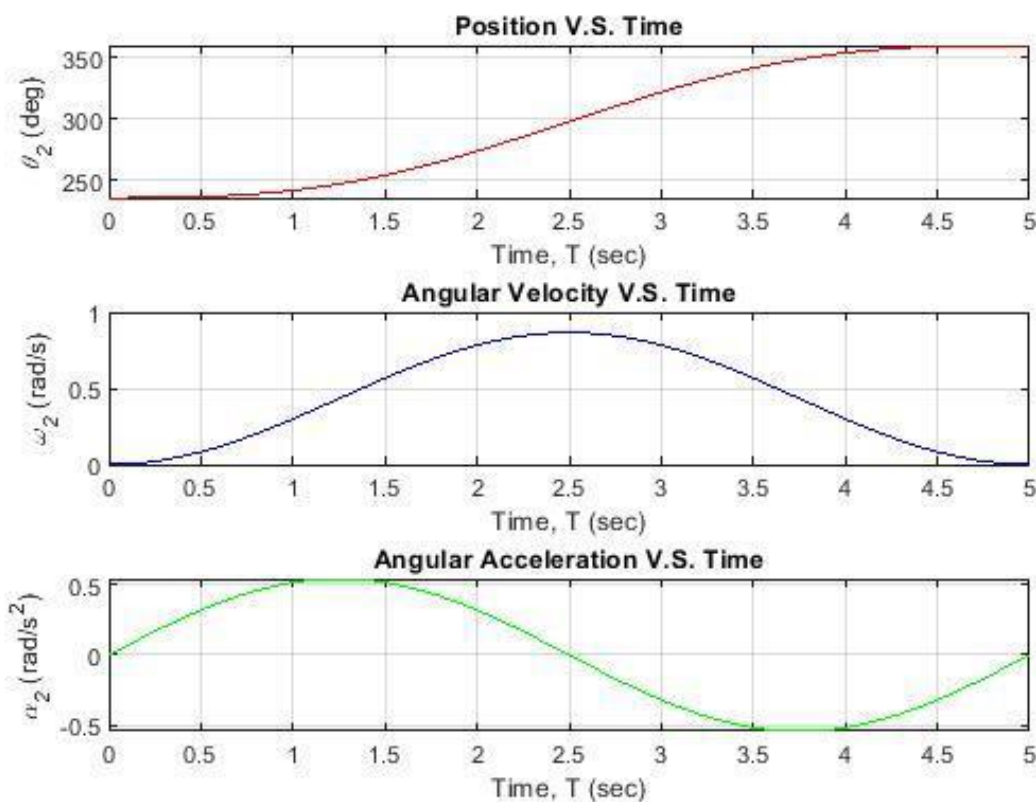


Рис. 2.4. Положення, кутова швидкість та кутове прискорення: дані роботи [121].

2. Динаміка закрилок при постійних значеннях швидкості літака та щільності повітря, але змінним навантаженням на шток.

Нехай потрібно знайти таке керування $F_L(t)$ на штоку електромеханічного приводу, при якому за заданий час відбувається поворот закрилок на максимальний кут. Іншими словами, функціонал

$$\varphi = \int_0^{T_0} \frac{d\varphi}{dt} dt \rightarrow \max \quad (2.40)$$

Для нього складаємо функцію Лагранжа для знаходження умовного екстремуму

$$\Phi = \frac{d\bar{\varphi}_F}{d\bar{t}} + \lambda \left(\frac{d^2\bar{\varphi}_F}{d\bar{t}^2} - A(\bar{t})\sin^2\bar{\varphi}_F(\bar{t}) - B(\bar{t})\sin\bar{\varphi}_F(\bar{t}) \right). \quad (2.41)$$

Підстановка явного вигляду для функції Лагранжа у відповідне рівняння Ейлера-Лагранжа варіаційного числення призводить до такого співвідношення

$$-A(\bar{t})2\sin\bar{\varphi}_F(\bar{t}) + B(\bar{t}) = 0,$$

з якого знаходиться явний вигляд для функції керування навантаженням на шток

$$F_L(\bar{t}) = 2A(\bar{t})\sin\bar{\varphi}_F(\bar{t}) \quad (2.42)$$

Якщо ми тепер підставимо (2.42) в (2.38), то отримаємо *рівняння оптимального закону повороту закрилок за фіксований проміжок часу*. Воно має такий вигляд

$$\frac{d^2\bar{\varphi}_F}{d\bar{t}^2} = -A(\bar{t})\sin^2\bar{\varphi}_F \quad (2.43)$$

При постійній швидкості руху і висоті (густина рідини постійна-це може бути при зльоті або посадці, коли висота сильно не змінюється) отримується розв'язок у вигляді

$$\bar{t}_{1,2}(\bar{\varphi}_F) = \pm \int_0^{\varphi_F \max} \frac{\sqrt{C_1 A^2 \operatorname{tg}^2 \bar{\varphi}_F + 2 A \operatorname{tg} \bar{\varphi}_F}}{2 + C_1 A \operatorname{tg} \bar{\varphi}_F} d\varphi_F + C_2. \quad (2.44)$$

Константи C_1, C_2 в (2.44) визначаються із початкових умов.

Оптимальність (2.42) полягає у тому, що робота сталої у часі сили навантаження на штоці дорівнює

$$\int_0^{\varphi_{F\max}} \frac{2A}{l_j} d\varphi_F = \frac{2A}{l_j} \varphi_{F\max} \quad (2.45)$$

в той час як робота силі (2.42) дорівнює

$$\int_0^{\varphi_{F\max}} \frac{2A}{l_j} \sin \varphi d\varphi_F = \frac{2A}{l_j} (1 - \cos(\varphi_{F\max})). \quad (2.46)$$

Відношення робіт відповідно буде дорівнювати

$$\frac{1 - \cos(\varphi_{F\max})}{\varphi_{F\max}} = \frac{\varphi_{F\max}}{2!} - \frac{\varphi_{F\max}^3}{4!} + \frac{\varphi_{F\max}^5}{6!} - \dots \quad (2.47)$$

Легко переконатися, що значення виразу (2.47) при значенні

$\varphi_{F\max} = 0,5 \text{ рад} \approx 30^\circ$ дасть величину приблизно рівну 0.25. Підтвердженням оптимальності виразу (2.42) є синусоїдальний характер навантаження [121]:

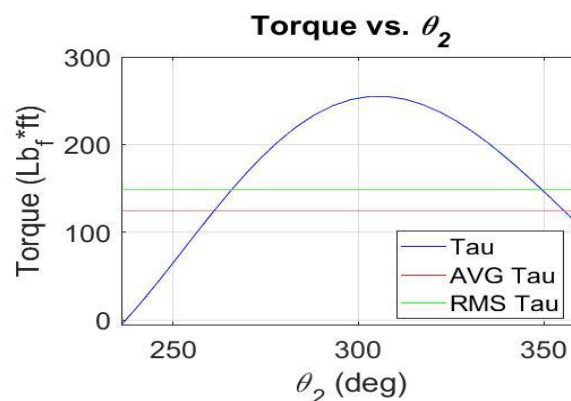


Рис. 2.5. Залежність крутного моменту від кута повороту [121].

Обговорення результатів

Будь-яка модель реального процесу – це певного роду спрощення. Проте спрощення мають бути завжди обґрунтовані. При докладному вивченні існуючих моделей процесу управління закрилками та порівняння з величинами

їх кутів повороту стало зрозуміло, що лінеаризація кінематичного зв'язку «шток-закрилок» не обґрунтована. Справа в тому, що точний аналітичний вираз для зазначеного зв'язку, заснований на використанні теореми косинусів, призводить до досить громіздких виразів – для першої та другої похідної за часом функції кута повороту крилок, вираженої через переміщення штока електромеханічного приводу. Цей факт, можливо, і зумовив спрощення у геометрії, що використовується в [46]. Результати розрахунків, та й апріорні геометричні співвідношення при кутах повороту 20-40 градусів вказують на правильність обраного підходу – заміни лінійних співвідношень на нелінійні.

2.3. Аналітичний розв'язок повного лінійного рівняння гідроприводу з об'ємним регулюванням

За наявними на сьогоднішній день джерелами можна зробити висновок про існування двох підходів для створення математичних моделей гідроприводу. Перший – це використання нелінійної системи рівнянь гідроприводу та її чисельного розв'язання сучасними програмними засобами, наприклад, за допомогою Simulink, в середовищі MatLab [1],[21],[123],[124]. Другий клас моделей заснований на лінійному рівнянні гідроприводу.

При цьому і у випадку дросельного регулювання, і у разі об'ємного регулювання гідроприводу система описується одним і тим же лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням третього порядку. Відмінність – лише в коефіцієнтах [8],[22] :

$$\begin{aligned} & \frac{JV_0}{2B_{\text{Ж}}q_M K_{Q\gamma}} \frac{d^3\alpha_M}{dt^3} + \left(\frac{k_{TP}V_0}{2B_{\text{Ж}}q_M K_{Q\gamma}} + \frac{k_{\Sigma}J}{q_M K_{Q\gamma}} \right) \frac{d^2\alpha_M}{dt^2} + \\ & + \frac{q_M}{K_{Q\gamma}} \left(1 + \frac{k_{\text{ПОЗ}}}{2B_{\text{Ж}}q_M^2} + \frac{k_{\Sigma}k_{TP}}{q_M^2} \right) \frac{d\alpha_M}{dt} + \frac{k_{\Sigma}k_{\text{ПОЗ}}}{q_M K_{Q\gamma}} \alpha_M = \gamma_H . \end{aligned} \quad (2.48)$$

У рівнянні (2.48) у всіх відомих джерелах [1],[8],[21],[22] нехтують $k_{ПОЗ} / (2B_{Ж} q_M^2)$ та $k_{\Sigma} k_{TP} / q_M^2$, вказуючи на їх малість. Також, що важливо, надалі використовують перетворення Лапласа для знаходження зображення (2.48) та його розв'язку. Тут пропонується загальний розв'язок повного рівняння лінійної моделі гідроприводу. Рівняння (2.48) з урахуванням нерівності нулю коефіцієнта при старшій похідній, можна представити, поділивши його на $JV_0 / (2B_{Ж} q_M K_{Q\gamma})$, у більш простому для розв'язання вигляді:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + A \frac{d^2 y}{dt^2} + B \frac{dy}{dt} + Cy = D, \quad (2.49)$$

$$\text{де } A = \left(\frac{k_{TP} V_0}{2B_{Ж} q_M K_{Q\gamma}} + \frac{k_{\Sigma} J}{q_M K_{Q\gamma}} \right) \left(\frac{JV_0}{2B_{Ж} q_M K_{Q\gamma}} \right)^{-1},$$

$$C = \frac{k_{\Sigma} k_{ПОЗ}}{q_M K_{Q\gamma}} \left(\frac{JV_0}{2B_{Ж} q_M K_{Q\gamma}} \right)^{-1}$$

$$B = \frac{q_M}{K_{Q\gamma}} \left(1 + \frac{k_{ПОЗ}}{2B_{Ж} q_M^2} + \frac{k_{\Sigma} k_{TP}}{q_M^2} \right) \left(\frac{JV_0}{2B_{Ж} q_M K_{Q\gamma}} \right)^{-1}, \quad D = \gamma_H \left(\frac{JV_0}{2B_{Ж} q_M K_{Q\gamma}} \right)^{-1}$$

Асимптотичний розв'язок (2.54) є:

$$y(t) = -\frac{D}{C} + C_1 e^{\frac{1}{6} \frac{t}{\Phi^{1/3}} [\Phi^{2/3} + \Psi + 2A\Phi^{1/3}]} + \\ + C_2 e^{-\frac{t}{\Phi^{1/3}} \left[\frac{1}{12} i (-i\Phi^{2/3} - i\Psi + 4iA\Phi^{1/3} - \sqrt{3}\Phi^{2/3} + \sqrt{3}\Psi) t \right]} +$$

$$+C_3 e^{\frac{t}{\Phi^{1/3}} \left[\frac{1}{12} i \left(\Phi^{2/3} + i\Psi - 4iA\Phi^{1/3} - \sqrt{3}\Phi^{2/3} + \sqrt{3}\Psi \right) t \right]}.$$

(2.50)

У розв'язку (2.50) використані такі позначення:

$$\Phi = 36AB + 108C + 8A^2 + 12\sqrt{-12B^2 - 3B^2A^2 + 54BAC + 81C^2 + 12CA^3},$$

$$\Psi = 12B + 4A^2. \quad (2.51)$$

Очевидно, що вираз (2.50) дозволяє більш точно враховувати всі фактори, що впливають на роботу гідроприводу. В даній роботі ведеться пошук аналітичних розв'язкам, що відповідають окремим випадкам роботи гідроприводу. Ці розв'язки дозволять глибше проникнути у фізичні аспекти різних режимів роботи гідроприводу, таких як гідроудар, дослідити на новому, більш точному рівні питання стійкості системи тощо.

2.4. Гідроудар в гідроприводі: рух поршня гідроциліндру під час гідроудару

Якщо на поршень діє хвиля гідроудару у вигляді [17]

$$V(x,t) = \frac{2(C_3^2 - C_2^2)}{\theta C_3} \tanh(C_1 + C_2 x + C_3 t), \quad (2.52)$$

то рівняння руху поршня гідроциліндру [2], після диференціювання його за часом, трансформується до

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = -2A \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} - (D_1 + R_t) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{B}{ch^2(C_1 + C_2 x + C_3 t)} \left(1 - 2C_3 \tanh(C_1 + C_2 x + C_3 t) \right).$$

(2.53)

Загальний розв'язок рівняння (2.53) має наступний вигляд:

$$x(t) = a + \int b(a) da + C_1; \quad t = -\frac{(\int b(a) da + C_1) C_3}{C_3},$$

$$\text{де} \quad \frac{BC_2^3 - ch(C_1 + aC_2)^2 + 2C_3 sh(C_1 + aC_2) b^4(a)}{C_3^3 ch^4(C_1 + aC_2)} +$$

$$\frac{\frac{d}{da} b(a) \cdot (2AC_3 - C_2 D_1 - C_2 R_t) b(a)}{C_3} + \frac{d^2}{da^2} b(a) + aA \frac{\left(\frac{d}{da} b(a)\right)^2}{b(a)} - 3 \frac{\left(\frac{d}{da} b(a)\right)^2}{ba} = 0,$$

$$a = \frac{C_2 x(t) + C_3 t}{C_2}, \quad b(a) = -\frac{C_3}{C_2 \frac{d(x(t))}{dt} + C_3} \quad (2.54)$$

Незважаючи на складний характер розв'язку (2.54) рівняння (2.53), можна легко отримати, що

$$x(t) = a - \frac{C_3}{C_2} t. \quad (2.55)$$

Порівняння (2.55) та (2.52) дає чіткий висновок: при гідроударі поршень рухається разом із ударним імпульсом зі швидкістю C_3 / C_2 . Це є частинний розв'язок (2.55) за умови $a = \text{Const}$. Отже, рівняння руху поршня дозволяє існування розв'язку у вигляді ударної хвилі.

Висновки

В математичній моделі випускання та прибиранні шасі слід враховувати складні погодні умови, такі як поривчастий вітер та дуже швидке налипання снігу або обледеніння.

Як показано в даному розділі, врахуванням нелінійності при описі кінематики руху системи "шток ЕМП-закрылок" нехтувати не можна. Закони руху штока ЕМП, відповідно, та кута повороту закрылок, відповідно, є різними математичними функціями. У існуючих (відомих) роботах з даної тематики для

опису динаміки кута повороту електромотора та передачі використовується закон теоретичної механіки про зміну кутового моменту. Однак цей закон, мабуть через зазначене спрощення кінематичного зв'язку, не використовується для опису динаміки повороту закрилок. Якщо вважати силу навантаження на штоку ЕМП, однією з шуканих функцій, наявність додаткового невідомого дозволяє додати в модель ще одне рівняння - закон зміна кутового моменту закрилок. Таким чином, наведена в роботі модель відповідає автоматичному («що стежить») визначенню навантаження на штоку ЕМП, яке необхідно створювати для керування закрилками.

І теоретичний, і практичний – обидва інтереси представляє оптимізація управління закрилками. У зв'язку з цим, у роботі розглянуті, на підставі варіаційного числення, задача найбільшого кута повороту закрилок за певний час та задача, розв'язок якої (керування закрилком) відповідає мінімально потрібній роботі (енергії) повороту закрилок.

Важливим моментом розглянутим в даному розділі є можливість аналітичного розв'язання нелінійних і лінійних диференціальних рівнянь, що описують системи, в яких гідропривід відіграє ключову роль. При здійсненні процесу керування механізацією крила (наприклад закрилками) рух поршня гідроциліндра не є ідеальним: відбувається зворотній зв'язок і шток гідроциліндру, разом із робочою рідиною, відчуває на собі нестационарні рухи типу ударного імпульсу. Отже, досконале вивчення фізичного явища нестационарної течії рідини в гідравлічній системі літаків та вертольотів є вкрай важливим.

В даному розділі також показано, що в системах керування рух штоку гідравлічного приводу здійснюється за законом, що співпадає з одним із можливих нестационарних рухів рідини при гідравлічному ударі. Отже, процес нестационарного руху рідини потребує більш ретельного дослідження.

Оскільки при нестационарному русі рідини має місце кавітація, то особливий інтерес також має задача про нестационарну течію в бульбашковій рідині. Нарешті, стінки структури, всередині якої тече рідина, не є абсолютно

жорсткими. Тож урахування взаємодії нестационарної течії (ударного імпульсу) зі структурою має теж неабиякий практичний інтерес.

Всі щойно зазначені фізичні явища розглянуто в наступних розділах.

Розділ 3. МОДЕЛЮВАННЯ ФОРМУВАННЯ НЕСТАЦІОНОЇ ТЕЧІЇ РІДИНИ В ГІДРАВЛІЧНІЙ СИСТЕМІ ЛІТАКІВ І ВЕРТОЛЬОТІВ

3.1. Однорідна крапельна рідина.

В даному розділі використовуються суто теоретичні підходи, що базуються на використанні відомих моделей течії крапельної рідини, методах аналітичного розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем, асимптотичні методи, виведення автомодельних рівнянь та знаходження їх розв'язків.

Формулювання задачі.

1. Дослідити ефекти конвекції та внутрішнього тертя в нестационарній течії крапельної рідини.

2. Отримати аналітичні розв'язки задачі та провести їх порівняльний аналіз із наведеними у вступі вже відомими розв'язками, в яких враховано лише у гідравлічному наближенні тертя рідини о стінку (модель тертя Вейсбаха-Дарсі).

3. Отримати функцію, яка дозволяє знаходити значення тиску за значеннями швидкості поширення хвилі.

3.1.1. Модель гідравлічного удару, яка враховує конвекцію поля швидкості.

Вивід рівняння у розмірному та безрозмірному виглядах.

Якщо при розгляді нестационарної течії не враховувати в'язкість, а лише конвекцію, то відповідна система рівнянь збереження кількості руху та маси має такий вигляд:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right); \quad (3.1)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \rho_0 \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3.2)$$

Для виключення тиску p знайдемо частинні похідні від кожного з рівнянь. Першого – за часом, другого – за координатою x . Після цього система рівнянь (3.1)–(3.2) перетвориться на таку:

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = \rho_0 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} \right); \quad (3.3)$$

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} = a^2 \rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (3.4)$$

Із рівнянь (3.3) і (3.4), виключаючи тиск, маємо:

$$a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}. \quad (3.5)$$

Для нескінченної області рівняння (3.5) доповнюється двома граничними умовами [17]:

$$V(x,0)=\varphi(x); \quad \frac{\partial V}{\partial t}(x,0)=\psi(x). \quad (3.6)$$

Отже, задача звелася до знаходження розв'язку рівняння (3.5), який задовольняє початковим умовам (3.6). Для якісного аналізу розв'язків слід формально перейти до безрозмірної форми рівняння (3.5). Із цією метою теж формально вводимо масштаби довжини та часу, масштаб швидкості тощо [17]:

$$[x]=L, \quad [t]=T, \quad [V]=L/T. \quad (3.7)$$

Врахуємо баланс сил, припускаючи що доданки лінійного хвильового рівняння мають той самий порядок за величиною:

$$\left[a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right]. \quad (3.8)$$

На підставі співвідношень (3.7) отримуємо такі вирази:

$$\left[a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] = \frac{a^2 L}{T L^2}; \quad \left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right] = \frac{L}{T^3}. \quad (3.9)$$

Підстановка (3.9) в (3.8) дає змогу отримати

$$\frac{a^2 L}{T L^2} = \frac{L}{T^3} \Rightarrow a = \frac{L}{T}.$$

Із урахуванням отриманих оцінок масштабів, рівняння (3.5) набуває такого безрозмірного вигляду:

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{t}^2} + \theta \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} \right). \quad (3.10)$$

В рівнянні (3.10) присутній єдиний безрозмірний параметр

$$\theta = \frac{L^2}{a^2 T^2}.$$

Параметр θ вказує наскільки нелінійні ефекти є вагомими в фізичному процесі, що розглядається.

Автомодельне рівняння поширення ударної хвилі та його розв'язок.

Як вже було зазначено у вступі, ще починаючи з роботи Рімана [101], далі Жуковського [68] та Аллієві [33], розв'язки рівняння (3.10) зручно і логічно з фізичної точки зору представляти у вигляді біжучої хвилі:

$$\bar{V}(\bar{x}, \bar{t}) = f(\bar{x} - \bar{a}\bar{t} + C) = f(\eta). \quad (3.11)$$

Перейдемо від функції $\bar{V}$ до функції $f(\eta)$ із урахуванням співвідношення, підставивши його в рівняння (3.10). У такий спосіб маємо:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} = \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \theta \left(\frac{df}{d\eta} (-\bar{a}) \frac{df}{d\eta} + f \cdot (-\bar{a}) \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right). \quad (3.12)$$

Для зручності розв'язання, перепишемо рівняння (3.12) у такому вигляді:

$$\left(1 - \bar{a}^2 + \bar{a}\theta \cdot f\right) \frac{d^2 f}{d\eta^2} = -\bar{a}\theta \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2. \quad (3.13)$$

Слід зауважити, зважаючи на безрозмірні співвідношення, величина $\bar{a} = 1$. Тож рівняння (3.13) по суті еквівалентне більш простому:

$$f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = -\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2. \quad (3.14)$$

Крім елементарного розв'язку у вигляді константи, рівняння (3.14) також має такі два розв'язки:

$$f_1(\eta) = \sqrt{2C_1\eta + 2C_2}, \quad f_2(\eta) = -\sqrt{2C_1\eta + 2C_2}. \quad (3.15)$$

Розв'язки (3.15), згідно із (3.11), вказують на дві протилежні швидкості поширення. Якщо прийняти за масштаб області поширення, у кожний момент часу, ударної хвилі за L_{SW} , то тоді за умов

$$f_1(\eta = 0) = -f_2(\eta = 0) = 1, \quad f_1(\eta = L_{SW}/2) = f_2(\eta = -L_{SW}/2) = 0.$$

маємо

$$f_1(\eta) = \sqrt{1 - 2\eta / L_{SW}}, \quad 0 \leq \eta \leq L_{SW}/2; \quad f_2(\eta) = -\sqrt{1 + 2\eta / L_{SW}}, \quad -L_{SW}/2 \leq \eta \leq 0. \quad (3.16)$$

Поза зоною $-L_{SW}/2 \leq \eta \leq L_{SW}/2$ обидва розв'язки (3.16) обертаються в нуль – сталим значенням, яке є також розв'язком рівняння (3.14). Слід зазначити, що для гідромеханіки, за умови нехтування ефектом в'язкості, такі результати цілком можливі: фронт хвиль (прямої і оберненої) є чітко окресленим. Як вже було зазначено у вступі, ці розв'язки схожі на те, що наведено в роботі [68] і

спостерігаються на початкових стадіях зародження ударного імпульсу в газах [26].

Якщо слідувати ідеям, які викладено в [17], то можна використати інший підхід щодо отримання автомодельного рівняння та його розв'язку. Із цією метою одразу підставимо у систему рівнянь (3.1)--(3.2) представлення у вигляді:

$$\bar{V} = \bar{V}(\eta), \bar{p} = \bar{p}(\eta). \quad (3.17)$$

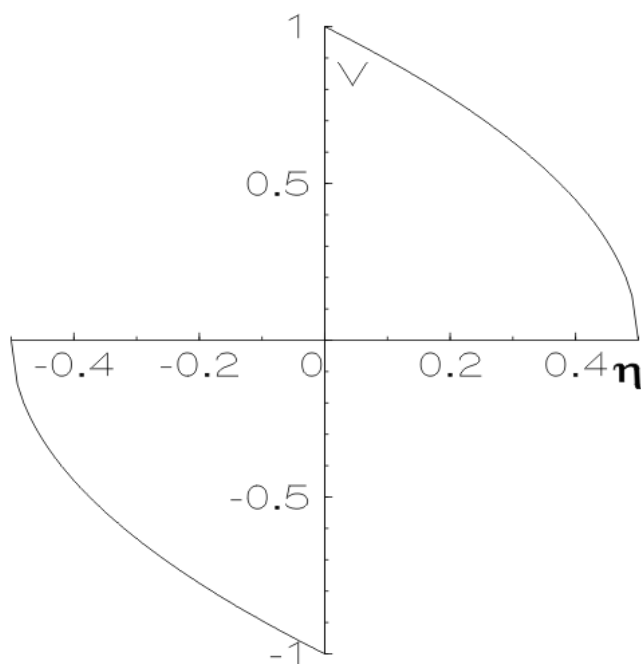


Рис. 3.1 Функція розподілу швидкості в ударній хвилі згідно із розв'язками (3.16).

Тоді безрозмірний аналог системи (3.1)--(3.2) набуває такого вигляду:

$$-\frac{dp}{d\eta} = -\bar{a} \frac{d\bar{V}}{d\eta} + \theta \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\eta}; \quad (3.18)$$

$$\bar{a} \frac{dp}{dt} = \frac{d\bar{V}}{d\eta}. \quad (3.19)$$

Лише зараз виключаємо функцію тиску. У результаті отримуємо:

$$-\frac{1}{\bar{a}} \frac{d\bar{V}}{d\eta} = (-\bar{a}) \frac{d\bar{V}}{d\eta} + \theta \cdot \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\eta}. \quad (3.20)$$

Для фізичного аналізу рівняння (3.20) перепишемо його у вигляді:

$$\left(-\frac{1}{\bar{a}} + \bar{a} - \theta \cdot \bar{V} \right) \frac{d\bar{V}}{d\eta} = 0. \quad (3.21)$$

Розв'язками (3.16) є множина сталих чисел. Але за умови $\bar{a} = 1$ маємо:

$$\frac{d(\bar{V}^2 / 2)}{d\eta} = 0. \quad (3.22)$$

Отже, за умови приблизної сталості густини, маємо факт поширення ударної хвилі (тиску) із сталою швидкістю.

Як бачимо, цей підхід менш змістовний, аніж попередній: розв'язків типу (3.16), які відмінні від константи, ми не отримали.

Аналітичний розв'язок у змінних тиск-швидкість (p - V).

В класичних дослідженнях ударних хвиль можна знайти таке поняття як ударна адіабата Ранкіна—Гюгоніо [62,99]. Йдеться про залежність функції тиску від оберненої до густини величини ударної хвилі. Як з'ясувалася, у випадку гідравлічного удару в крапельній рідині виявляється можливість теж отримати функцію залежності тиску від швидкості поширенні ударної хвилі:

$$\bar{p} = \bar{p}(\bar{V}). \quad (3.23)$$

В співвідношення (3.23) одразу використані позначення у безрозмірних величинах. Спочатку запишемо безрозмірний аналог системи (3.1)--(3.2). Маємо:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \theta \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}}. \quad (3.25)$$

Розділимо ліву і праву частини рівняння (3.17) на ліву і праву частини рівняння (3.18) відповідно:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{p}} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} / \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} + \theta \bar{V} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{V}} + \theta \bar{V}. \quad (3.26)$$

Оскільки ми припустили, що тиск залежить лише від швидкості (єдиної незалежної змінної), то рівняння (3.26) можна подати у такому вигляді:

$$\left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{V}} \right)^2 + \theta \bar{V} \frac{d\bar{p}}{d\bar{V}} - 1 = 0. \quad (3.27)$$

Рівняння (3.27) має такі два розв'язки:

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{V}} = \frac{-\theta \bar{V} \pm \sqrt{(\theta \bar{V})^2 + 4}}{2}. \quad (3.28)$$

Розв'язками рівнянь (3.28) є такі функції тиску від швидкості (ударні адіабати):

$$\begin{aligned} \bar{p}_1(\bar{V}) &= \frac{-\bar{V} \sqrt{(\theta \bar{V})^2 + 4}}{4} - \frac{1}{\sqrt{\theta^2}} \ln \left(\frac{\theta^2 \bar{V}}{\sqrt{\theta^2}} + \sqrt{(\theta \bar{V})^2 + 4} \right) - \frac{\theta \bar{V}^2}{4} + C_1. \\ \bar{p}_2(\bar{V}) &= \frac{\bar{V} \sqrt{(\theta \bar{V})^2 + 4}}{4} + \frac{1}{\sqrt{\theta^2}} \ln \left(\frac{\theta^2 \bar{V}}{\sqrt{\theta^2}} + \sqrt{(\theta \bar{V})^2 + 4} \right) - \frac{\theta \bar{V}^2}{4} + C_1. \end{aligned}$$

Константа C_1 визначається із умови:

$$\bar{p}(\bar{V} = 0) = \bar{p}_0. \quad (3.29)$$

В рівнянні (3.29) $\bar{p}_0$ означає незбурений тиск. Оскільки в наведених розв'язках ми так і не знаємо явний вигляд тиску, слід його знайти. Для цього запишемо

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{V}} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}}. \quad (3.30)$$

Тепер перепишемо рівняння (3.26) у такому вигляді:

$$-\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \theta \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}}\right) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{d\bar{p}}{d\bar{V}} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}}. \quad (3.31)$$

Далі зручно перейти в рівнянні (3.31) до автомоделної змінної. Маємо:

$$-\left(-a \frac{d\bar{V}}{d\eta} + \theta \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\eta}\right) = \frac{d\bar{p}}{d\bar{V}} \frac{d\bar{V}}{d\eta}. \quad (3.32)$$

Підставимо вираз (3.28) у рівняння (3.32). Маємо:

$$a \frac{d\bar{V}}{d\eta} - \theta \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\eta} = \frac{-\theta \bar{V} \pm \sqrt{(\theta \bar{V})^2 + 4}}{2} \frac{d\bar{V}}{d\eta}. \quad (3.33)$$

Рівняння (3.33) не тільки вказує на сталу швидкість поширення ударної хвилі, але і дозволяє знайти значення цієї швидкості. Дійсно, після скорочення на похідну, маємо

$$\bar{V} = \frac{a^2 - 1}{a\theta}. \quad (3.34)$$

Тепер задачу можна вважати повністю розв'язаною: знайдено, що за умов відсутності (не урахування) тертя ударна хвиля поширюється зі сталою швидкістю, а значення тиску в рідині можна знайти за ударними адіабатами.

3.1.2. Урахування стаціонарного тертя в моделі гідравлічного удару.

Урахування в'язкого механізму обміну кількістю руху за рахунок мінливості течії.

Якщо тертя на стінці не враховувати, навіть у гідравлічному наближенні, то в'язкість враховується тим, що замість рівнянь Ейлера використовуються рівняння Нав'є-Стокса. Отже, замість рівняння (3.32) маємо безрозмірне рівняння

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + \theta \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{x}^2}. \quad (3.35)$$

В рівнянні (3.35) $\text{Re} = [\bar{V}][\bar{L}]/\nu$. Це рівняння фізично відповідає поширенню хвилі із урахуванням її в'язкої розмитості.

В автономних змінних система рівнянь (3.19), (3.35) має такий вигляд рівняння (3.20) та такого:

$$-a \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} + \theta \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \eta^2},$$

або у зручному для інтегруванні вигляді

$$\frac{d^2 \bar{V}}{d\eta^2} = \text{Re} \left(\theta \bar{V} - a + \frac{1}{a} \right) \frac{d\bar{V}}{d\eta}. \quad (3.36)$$

Рівняння (3.36) має три розв'язки. Перший -- сталі значення швидкості, другий і третій суть

$$\bar{V}(\eta) = \frac{a^2 - 1}{a\theta} \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{C_1}}{\sqrt{\text{Re}\theta}} \text{tg} \left[\sqrt{2\text{Re}\theta C_1} (C_2 + \eta) \right].$$

Якісний аналіз отриманого розв'язку вказує на хвилю, що поширюється, і в неї лише поблизу точок, для яких

$$\sqrt{2\text{Re}\theta C_1} (C_2 + \eta) \approx \pm \frac{\pi}{2},$$

амплітуда швидкості суттєво відрізняється від константи. Це -- відносно тонкий шар безпосередньо на фронті ударної хвилі називають, за аналогією з тонким примежовим шаром, ударним шаром.

3.1.3. Вплив стаціонарного тертя на загальну картину поширення ударної хвилі

Згідно із назвою, рівняння збереження кількості руху тепер враховує радіальний градієнт (модель Вейсбаха—Дарсі [50,118]) повздовжньої швидкості та неоднорідність самої швидкості уздовж напрямку течії (ось труби):

$$\rho_0 \left(\frac{\partial V}{\partial t} - V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\lambda}{8R} V |V| \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (3.37)$$

Рівняння нерозривності залишається тим же – (3.2). Розмірний вигляд більш зручний, оскільки нам потрібно ще оцінити співвідношення сил. Замість доданка із модулем швидкості можна записати подвійний знак

$$V |V| = \begin{cases} -V^2, & V < 0; \\ V^2, & V > 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Тепер перейдемо до автомодельної змінної:

$$\rho_0 \left(-a \frac{dV}{d\eta} - V \frac{dV}{d\eta} \pm \frac{\lambda}{8R} V^2 \right) = - \frac{dp}{d\eta} + \mu \frac{d^2 V}{d\eta^2}, \quad (3.39)$$

$$a \frac{dp}{d\eta} = a^2 \rho_0 \frac{dV}{d\eta}. \quad (3.40)$$

Підстановка рівняння (3.40) в (3.39) дає:

$$\rho_0 \left(-a \frac{dV}{d\eta} - V \frac{dV}{d\eta} \pm \frac{\lambda}{8R} V^2 \right) = -a \rho_0 \frac{dV}{d\eta} + \mu \frac{d^2 V}{d\eta^2}. \quad (3.41)$$

Після спрощення, рівняння (3.41) набуває вигляду:

$$\nu \frac{d^2 V}{d\eta^2} = V \frac{dV}{d\eta} \pm \frac{\lambda}{8R} V^2. \quad (3.42)$$

В рівнянні (3.42) ν -- коефіцієнт кінематичної в'язкості. Незважаючи на ніби відносно простий вигляд рівняння (3.42), його розв'язок досить складний і не представляється в явному вигляді.

Оскільки величина коефіцієнта молекулярної в'язкості значно менша за одиницю та обидва нелінійні доданки практично усюди окрім тонкого шару із різким повздовжнім градієнтом швидкості, то логічно ввести відношення молекулярної в'язкості до в'язкості на стінках труби і переписати рівняння (3.42) у більш зручному для фізичного аналізу вигляді:

$$\varepsilon \frac{d^2 V}{d\eta^2} = V \left(\frac{8R}{\lambda} \frac{dV}{d\eta} \pm V \right), \quad (3.43)$$

де $\varepsilon = \nu 8R / \lambda$ -- малий параметр, фізичний зміст якого є відношення величини молекулярної в'язкості до сили тертя на стінці труби.

Застосуємо до рівняння (3.43) теорію асимптотичних наближень за малим параметром. Згідно із цією теорією, шукану функцію швидкості представляємо у вигляді степеневого ряду за малим параметром:

$$V(\eta) = V_0(\eta) + \varepsilon V_1(\eta) + \varepsilon^2 V_2(\eta) + \dots \quad (3.44)$$

Відповідні наближення, -- $V_0(\eta), V_1(\eta), V_2(\eta) \dots$, -- знаходимо підстановкою (3.44) в (3.43) і збиранням усіх доданків при відповідних степенях ε . Для «0-го» наближення отримується таке рівняння:

$$0 = V_0 \left(\frac{8R}{\lambda} \frac{dV_0}{d\eta} \pm V_0 \right). \quad (3.45)$$

Розв'язком (3.42) є

$$V_0(\eta) = C_1 \exp\left(\mp \frac{\lambda}{8R} \eta\right). \quad (3.46)$$

Нагадаємо, що знаки в аргументі обрані таким чином, щоби експонента спадала. Тобто «-» відповідає додатнім значенням автомодельної змінної, а «+» від'ємним. На рис. 3.2 наведено графік цієї функції, що відповідає відсутності урахування конвекції в моделі.

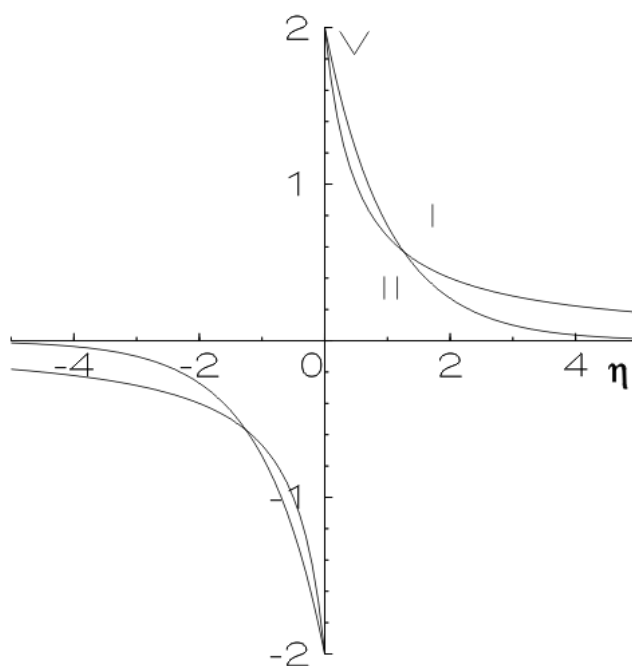


Рис. 3.2. Розподіл швидкості: I -- з урахуванням лише тертя на стінках (3.44); II – з урахуванням також і конвекції (3.46).

Наступне наближення знаходимо із такого рівняння

$$\varepsilon \left(\frac{d^2 V_0}{d\eta^2} + \varepsilon \frac{d^2 V_1}{d\eta^2} \right) = (V_0 + \varepsilon V_1) \left(\frac{8R}{\lambda} \left(\frac{dV_0}{d\eta} + \varepsilon \frac{dV_1}{d\eta} \right) \pm (V_0 + \varepsilon V_1) \right). \quad (3.47)$$

Збираємо доданки із першим степенем малого параметра ε . Отримуємо таке рівняння:

$$\frac{d^2 V_0}{d\eta^2} = \frac{8R}{\lambda} \left(V_0 \frac{dV_1}{d\eta} + V_1 \frac{dV_0}{d\eta} \right) \pm 2V_0 V_1. \quad (3.48)$$

Тепер використаємо явний вигляд нульового наближення (3.46) і підставимо його в рівняння (3.47). Після алгебраїчних спрощень отримується таке рівняння:

$$\frac{dV_1}{d\eta} = \mp \frac{\lambda}{8R} V_1 + \left(\frac{\lambda}{8R} \right)^3. \quad (3.49)$$

Розв'язок (3.49) має такий вигляд:

$$V_1(\eta) = \left(\frac{\lambda}{8R} \right)^3 \eta + C_2 \exp \left(\mp \frac{\lambda}{8R} \eta \right). \quad (3.50)$$

Перший доданок в (3.50) є лінійною функцією від автомодельної координати. Тому аби мати змогу «загнути» розв'язок и примусити його наблизитися до нуля, врахуємо ще одне наближення -- другого порядку малості з ε . Знову виписуємо потрібне рівняння у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{d^2 V_0}{d\eta^2} + \varepsilon \frac{d^2 V_1}{d\eta^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2 V_2}{d\eta^2} \right) = & \left(V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 \right) \times \\ & \times \left(\frac{8R}{\lambda} \left(\frac{dV_0}{d\eta} + \varepsilon \frac{dV_1}{d\eta} + \varepsilon^2 \frac{dV_2}{d\eta} \right) \pm \left(V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 \right) \right). \end{aligned}$$

Після алгебраїчних перетворень та скорочень, що враховують явний вигляд попередніх наближень, отримується таке рівняння:

$$\frac{dV_2}{d\eta} \pm DV_2 = -\frac{D^6}{C_1} \eta \exp(\pm D\eta). \quad (3.51)$$

де $D = \lambda / 8R$.

$$V_2(\eta) = \left(-\frac{\exp((D+1)\eta) D^6 ((D+1)\eta - 1)}{C_1 (D+1)^2} + C_2 \right) \exp(-\eta), \eta \geq 0.$$

$$V_2(\eta) = \left(\frac{\exp(-(D+1)\eta) D^6 ((D+1)\eta + 1)}{C_1 (D+1)^2} + C_2 \right) \exp(\eta), \eta \leq 0.$$

Отже, отримано загальний вигляд асимптотичного розв'язку із точністю до другого порядку за малим параметром ε . Як показав кількісний аналіз урахування першого та другого асимптотичних наближень для гладких труб, вони є нехтовно малі у порівнянні із нульовим наближенням. Отже, для прикладних розрахунків досить обмежитись виразом (3.46). З іншого боку, порівняння кривих на рис. 3.2 свідчить про істотність конвекції поля швидкості при поширенні ударної хвилі.

Обговорення

Безперечно, в сучасному світі комп'ютерний експеримент відіграє неабияку роль у дослідженнях складних явищ, зокрема і гідравлічного удару. На сьогодні існують не тільки одновимірні моделі поширення ударної хвилі у крапельної рідині, але і двовимірні, також ті, що враховують турбулентний характер течії під час проходження ударного імпульсу [109]. Але, з іншого боку, стрімкий розвиток комп'ютерної техніки зробив можливим і аналітичне розв'язання багатьох нелінійних диференціальних рівнянь та їх систем – у символічному вигляді. Поєднання досвіду отримання автотомодельних рівнянь та їх розв'язків відкрило нові можливості для знаходження аналітичних розв'язків, які описують явище гідравлічного удару. Для технічних потреб це є конче потрібним, оскільки дає можливість оцінки величини підвищення тиску та наслідків цього підвищення – пружної деформації поверхні трубопроводу та втомних явищ [29]. Ці деформації пов'язані із поступальним рухом кавітації, що супроводжує ударну хвилю [116]. Вони, в решті решт, призводять до втомної корозії поверхні труби [77], що є вкрай небажаним явищем.

3.2. Бульбашкова рідина

Методи досліджень у даному розділі є суто теоретичними. Використовується відома модель бульбашкової рідини як одношвидкісного континууму. Диференціальні рівняння розв'язуються аналітично, наближено (розвиненням у ряди) та чисельно. Крім того, застосовується оригінальний підхід отримання аналітичного розв'язку автономної системи – знаходження функції збурень тиску від швидкості поширення ударного імпульсу (та навпаки).

3.2.1. Математична модель нестационарної течії крапільної рідини за наявності в ній невеликої фракції бульбашок газу

Формулювання задачі

На підставі нелінійної моделі нестационарної течії в рідині, яка містить незначну кількість бульбашок газу, сформулювати та розв'язати задачу про гідравлічний удар, зокрема знайти аналітичні та чисельні розв'язок цієї задачі.

Дослідити вплив тертя рідини о стінку на процес поширення ударного імпульсу.

Провести порівняльний аналіз отриманого розв'язку із подібним розв'язком у однорідній рідині.

Нестационарна течія крапільної рідини за наявності в ній невеликої кількості бульбашок газу.

Подальші дослідження ґрунтуються на таких припущеннях [93]:

- слабкі збурення;
- однорідна монодисперсна суміш;
- рідина мало стислива;
- для розрахунків використовується одношвидкісна схема із політропним газом та ефективною в'язкістю.

Система диференціальних рівнянь складається із [93]:
рівняння збереження кількості руху (імпульсу) середовища

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho \approx \rho_1^0 \alpha_1; \quad (3.52)$$

рівняння збереження маси

$$\left(\frac{\partial \rho_1^0}{\partial t} + V \frac{\partial \rho_1^0}{\partial x} + \rho_1^0 \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{3\alpha_2 w_{1a}}{\alpha_1 a} \rho_1^0; \quad (3.53)$$

рівняння акустичної стисливості несучої рідини:

$$\rho_1^0 = \rho_{10}^0 + \frac{p - p_0}{c_1^2}. \quad (3.54)$$

У рівняннях (3.52)-(3.54) присутні шість параметрів: α_1 , α_2 -- концентрації фаз, a , w_{1a} , c_1 - радіус бульбашки, радіальна швидкість в бульбашці, швидкість звуку в рідині, ρ_{10}^0 -- незбурена щільність основної фази (рідини). Про них докладно можна дізнатися у [93], рівняння (6.2.1). Хоча ці рівняння зазначені в [93] як такі, що відповідають малим збуренням, але із рівняння (3.54) випливає лише, що

$$\frac{p - p_0}{c_1^2} \ll \rho_{10}^0. \quad (3.55)$$

Отже, нерівність (3.55) справедлива для типових значень $\rho_{10}^0 = O(10^3)$ та $c_1 \approx 1.5 \cdot 10^3$ дає $p - p_0 \approx 2 \cdot 10^9 \approx 20000$ атм. Збурення тиску під час гідравлічного удару порядку сотні – двом сотням атмосфер буде відповідати «малим» -- відносно 20000 атм. (в межах 1-2%).

Підставимо друге рівняння (3.52) в перше, а рівняння (3.54) в рівняння (3.53). Отримаємо:

$$\alpha_1 \rho_1^0 \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{c_1^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \left(\rho_{10}^0 + \frac{p - p_0}{c_1^2} \right) \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{3\alpha_2 w_{1a}}{\alpha_1 a} \left(\rho_{10}^0 + \frac{p - p_0}{c_1^2} \right). \quad (3.57)$$

Слід зазначити, що із (3.56-3.57) у випадку однорідної рідини маємо [26,83]:

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Це важливо, оскільки можна легко припуститися помилки і залишити доданок, що відповідає конвекції поля тиску, але ж він з'явився лише завдяки неоднорідності рідини і, отже, немає ніякого відношення при розгляді гідравлічного удару в однорідній рідині.

В подальшому зручніше розглядати не сам тиск, а його збурення $p' = p - p_0$. При цьому справедливе таке співвідношення:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial (p - p_0)}{\partial x} = \frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (3.58)$$

Система рівнянь (3.56--3.57), із урахуванням (3.58), буде вже мати такий вигляд:

$$\alpha_1 \left(\rho_{10}^0 + \frac{p'}{c_1^2} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad (3.59)$$

$$\left(\rho_{10}^0 + \frac{p'}{c_1^2}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial x} - 3 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{w_{1a}}{a}\right) + \frac{1}{c_1^2} \left(V \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial t}\right) = 0. \quad (3.60)$$

3.2.2. Виведення безрозмірних рівнянь у автомодельних змінних

Обезрозміримо систему рівнянь (3.59)--(3.60). Це значно спростить математичний вигляд задачі.

Введемо масштаби довжини, швидкості, часу та густини таким чином:

$$[x] = L, \quad [V] = c_1, \quad [t] = \frac{[x]}{[V]} = \frac{L}{c_1}, \quad [\rho] = \rho_{10}^0.$$

Підставивши ці співвідношення у рівняння (3.52), отримаємо таке співвідношення:

$$\rho_{10}^0 \alpha_1 \left(1 + \frac{\bar{p}'}{c_1^2}\right) \frac{c_1^2}{L} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}}\right) + \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{[p']}{L} = 0. \quad (3.61)$$

Із рівняння (3.61) випливає, що

$$[p'] = \rho_{10}^0 \alpha_1 c_1^2. \quad (3.62)$$

$$(1 + \alpha_1 \bar{p}') \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}}\right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0. \quad (3.63)$$

Рівняння (3.63), однак, не містить в'язких ефектів. Це стосується перш за все тертя о стінку, яке можна описати моделлю Вейсбаха-Дарсі [50,118]. З урахуванням щойно введених масштабів, відповідний доданок в рівнянні збереження кількості руху має такий вигляд:

$$\frac{\lambda}{4R_H} \rho_{10}^0 (1 + \alpha_1 \bar{p}') c_1^2 \bar{V} |\bar{V}|. \quad (3.64)$$

В (3.64) R_H -- гідравлічний радіус.

Оскільки при безрозмірюванні (3.59) ми ділили на $\rho_{10}^o \alpha_1 c_1^2 / L$, то проробимо ту ж саму процедуру із виразом (3.64). В результаті отримуємо ще один новий безрозмірний параметр

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda L}{4R_H}. \quad (3.65)$$

Тепер рівняння (3.63), із урахуванням ефекту тертя о стінку, перетворюються на таке:

$$(1 + \alpha_1 \bar{p}') \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}} + \bar{\lambda} (1 + \bar{p}') \bar{V} |\bar{V}| = 0. \quad (3.66)$$

Виділимо в рівнянні (3.60) масштаби всіх рухів і перепишемо його в такому вигляді:

$$\rho_{10}^o (1 + \bar{p}') \frac{c_1}{L} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} - 3 \frac{\alpha_2}{\alpha_1 a} \frac{w_{1a}}{c_1} L \right) + \frac{1}{c_1^2} c_1 \rho_{10}^o \frac{c_1^2}{L} \bar{V} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{c_1^2} \rho_{10}^o \frac{c_1^2}{L} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{t}} = 0.$$

Після спрощень, отримується:

$$(1 + \bar{p}') \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} - 3 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{w_{1a}}{c_1} \frac{L}{a} \right) + \left(\bar{V} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{t}} \right) = 0.$$

Введемо також новий параметр

$$Bb = 3 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{w_{1a}}{c_1} \frac{L}{a}. \quad (3.67)$$

Параметр Bb у виразі (3.67) очевидно відповідає за вплив бульбашок на динаміку течії. Отже, другим безрозмірним рівнянням (збереження маси), з урахуванням (3.58), буде Bb:

$$(1 + \bar{p}') \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} - Bb \right) + \left(\bar{V} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{t}} \right) = 0. \quad (3.68)$$

Система рівнянь (3.66), (3.68) і є шуканою. Звернемо увагу на те, що вона містить три безрозмірних параметри: α_1 , $\bar{\lambda}$, Bb . При цьому два з них відносяться до вмісту бульбашок у рідині, а третій – відповідає урахуванню тертя о стінку. Також припускається, що тертя о стінку приблизно теж саме, як і без вмісту бульбашок, так як цей параметр є малим (кілька відсотків).

Система рівнянь (3.57), (3.59) повинна доповнюватися початковими і, якщо наявні межі, граничними умовами. Тому, як і у попередніх дослідженнях [27,85], для спрощення математичної задачі та формулювання вказаних умов зручно перейти до автомоделної змінної. Згадаємо, що c_1 - швидкість звуку у несучій фазі, тобто ту рідині. Перейдемо від (x, t) до автомоделної змінної

$$\eta(x, t) = x - c_1 t,$$

або у безрозмірних величинах

$$\bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{x} - \bar{t}. \quad (3.69)$$

У автомоделних змінних система рівнянь (3.66), (3.68) набуває такого вигляду:

$$\left(1 + \alpha_1 \bar{p}' \right) \left(-\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{\eta}} \right) + \frac{d\bar{p}'}{d\bar{\eta}} + \bar{\lambda} (1 + \bar{p}') \bar{V} |\bar{V}| = 0, \quad (3.70)$$

$$(1 + \bar{p}') \left(\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} - Bb \right) + \left(\bar{V} \frac{d\bar{p}'}{d\bar{\eta}} - \frac{d\bar{p}'}{d\bar{\eta}} \right) = 0. \quad (3.71)$$

3.2.3. Поширення ударної хвилі в бульбашковій рідині без урахування тертя о стінки.

Для ясного розуміння впливу різних фізичних чинників на процес поширення ударної хвилі почнемо із моделі, де тертя о стінку не враховується.

Одразу перепишемо систему рівнянь (3.70)--(3.71), без урахування тертя Вейсбаха-Дарсі, у вигляді відносно шуканих $d\bar{p}'/d\bar{\eta}$, $d\bar{V}'/d\bar{\eta}$

$$(1 + \alpha_1 \bar{p}')(\bar{V} - 1) \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \frac{d\bar{p}'}{d\bar{\eta}} = 0, \quad (3.72)$$

$$(1 + \alpha_1 \bar{p}')(\bar{V} - 1) \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \frac{d\bar{p}'}{d\bar{\eta}} = 0, \quad (3.73)$$

Застосуємо метод Крамера. Матриця системи (3.72)--(3.73) має вигляд:

$$\begin{pmatrix} (1 + \alpha_1 \bar{p}')(\bar{V} - 1) & 1 & 0 \\ (1 + \bar{p}') & (\bar{V} - 1) & Bb(1 + \bar{p}') \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Визначник матриці (3.74) дорівнює:

$$\Delta = (1 + \alpha_1 \bar{p}')(\bar{V} - 1)^2 - (1 + \bar{p}').$$

Два інших визначники є

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ Bb(1 + \bar{p}') & (\bar{V} - 1) \end{vmatrix} = -Bb(1 + \bar{p}'),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (1 + \alpha_1 \bar{p}')(\bar{V} - 1) & 0 \\ (1 + \bar{p}') & Bb(1 + \bar{p}') \end{vmatrix} = Bb(1 + \alpha_1 \bar{p}')(1 + \bar{p}')(\bar{V} - 1).$$

Згідно із методом Крамера, маємо розв'язок у вигляді такої автономної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} = - \frac{Bb(1 + \bar{p}')}{(1 + \alpha_1 \bar{p}')(\bar{V} - 1)^2 - (1 + \bar{p}')}, \quad (3.75)$$

$$\frac{d\bar{p}'}{d\bar{\eta}} = \frac{Bb(\bar{V}-1)(1+\alpha_1\bar{p}')(1+\bar{p}')}{(1+\alpha_1\bar{p}')(\bar{V}-1)^2 - (1+\bar{p}')} \quad (3.76)$$

Систему рівнянь (3.75)--(3.76) можна розв'язувати прямо, але є особливий підхід. Завдяки автономності цієї системи, можна перейти у фазову площину і розглядати збурення тиску як функцію швидкості:

$$\frac{d\bar{p}'}{d\bar{V}} = -(\bar{V}-1)(1+\alpha_1\bar{p}'). \quad (3.77)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.77) такий:

$$\bar{p}'(\bar{V}) = C_1 \exp(-\alpha_1\bar{V}(\bar{V}-2)) - 1/\alpha_1. \quad (3.78)$$

Вочевидь, для хвилі стиснення збурення тиску має бути додатнім, отже в розв'язку (3.78) $C_1 > 0$. Максимум збурень тиску досягається за значення $\bar{V}=1$ і відповідає

$$\bar{p}'(\bar{V}=1) = C_1 \exp(\alpha_1) - 1/\alpha_1. \quad (3.79)$$

Із співвідношення (3.79) вже досить легко зрозуміти, чому дорівнює невідома константа інтегрування. Дійсно, нагадаємо, що за масштаб збурень тиску обрано його максимум. Це означає, що

$$\bar{p}'(\bar{V}=1) = C_1 \exp(\alpha_1) - 1/\alpha_1 = 1.$$

Звідки $C_1 = (1 + 1/\alpha_1) \exp(-\alpha_1)$.

Тому остаточний вигляд функції збурення тиску такий:

$$\bar{p}'(\bar{V}) = (1 + 1/\alpha_1) \exp(-\alpha_1(\bar{V}-1)^2) - 1/\alpha_1. \quad (3.80)$$

Вираз (3.80) чітко вказує на те, що скрізь поза максимумом ударного імпульсу, де $\bar{V} \neq 1$, збурення тиску менші за максимальне значення. Крім того, з рис. 3.3а) також видно, що графік кривої залежності тиску від швидкості є якісно схожим із рис. 2 [38], а також рис. 2-4 [117]. Однак збурення тиску не можуть приймати будь які значення. Тож область можливих значень швидкості поширення ударної хвилі є обмеженою. Ці обмеження обумовлюються максимально можливим від'ємним значенням збурень тиску: вони не повинні, за абсолютним значенням, перевищувати величину робочого тиску в трубопроводі, бо абсолютний тиск не може приймати від'ємні значення. Навіть більше – для рідини це поріг тиску, за якого відбувається явище кавітації. Отже, слід шукати обмеження на швидкість поширення ударної хвилі із такої нерівності:

$$[\bar{p}']\bar{p}'(\bar{V}) = [\bar{p}'] \left(2 \exp \left(-\alpha_1 (\bar{V} - 1)^2 / 2 \right) - 1 \right) > -p_w + p_{ss}.$$

У останньому співвідношенні p_w, p_{ss} -- відповідно робочий тиск у трубопроводі та тиск насиченої пари.

Із системи рівнянь (3.75)--(3.76) можна знайти $\bar{V}(\bar{\eta})$ та $\bar{p}'(\bar{\eta})$. Почнемо із рівняння (3.75) і підставимо в нього розв'язок (3.80). В результаті отримується таке рівняння відносно $\bar{V}(\bar{\eta})$:

$$\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} = \frac{-Bb \left(1 - \frac{1}{\alpha_1} + \left(1 + \frac{1}{\alpha_1} \right) \exp \left(-\alpha_1 (\bar{V} - 1)^2 \right) \right)}{\exp \left(-\alpha_1 (\bar{V} - 1)^2 \right) \left((1 + \alpha_1) (\bar{V} - 1)^2 - \left(1 + \frac{1}{\alpha_1} \right) \right) - 1 \left(1 - \frac{1}{\alpha_1} \right)}.$$

(3.81)

Співвідношення (3.81) чітко вказує на складний характер розв'язку для функції швидкості у разі прямого інтегрування рівняння (3.81). На підставі

рівняння (3.81) можна отримати аналітичний розв'язок, якщо розглянути рівняння (3.81) у оберненому вигляді:

$$\frac{d\bar{\eta}}{d\bar{V}} = - \frac{\exp\left(-\alpha_1(\bar{V}-1)^2\right) \left(\left(1+\alpha_1\right)(\bar{V}-1)^2 - 1 - \frac{1}{\alpha_1} \right) - 1 \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)}{Bb \left(1 - \frac{1}{\alpha_1} + \left(1 + \frac{1}{\alpha_1}\right) \exp\left(-\alpha_1(\bar{V}-1)^2\right) \right)}.$$

Після алгебраїчних перетворень, вдається дійти до розв'язку у вигляді

$$\bar{\eta}(\bar{V}) = -\frac{\alpha_1}{Bb} \frac{(\bar{V}-1)^3}{3} + \frac{\bar{V}}{Bb} + C_1 + \int \frac{\alpha_1(\alpha_1-1)(\bar{V}-1)^2}{Bb \left(\left(1+\alpha_1\right) \exp\left(-\alpha_1(\bar{V}-1)^2\right) + \alpha_1 - 1 \right)} d\bar{V} \quad (3.82)$$

Для оцінки значимості доданка в (3.82), що містить інтеграл, слід повернутися до визначення параметра Bb . Зробимо оцінку:

$$\frac{\alpha_1-1}{Bb} = \frac{\alpha_1-1}{3\alpha_2} \frac{\alpha_1}{1} \frac{c_1}{w_{1a}} \frac{a}{L} = \frac{\alpha_1}{3} \frac{c_1}{w_{1a}} \frac{a}{L}. \quad (3.83)$$

Права частина в (3.83) є добуток трьох співвідношень, двоє з яких мають порядок одиниці, а от третій, відношення радіусу бульбашки до довжини ударної хвилі, вочевидь дуже малий. Дійсно, враховуючи швидкість поширення хвилі (порядок 1000 м/с) і частоту хвилі гідравлічного удару (десятки-перші сотні Герц), маємо довжину хвилі порядку метрів і більше, що вочевидь у багато разів перевищує радіус бульбашки (міліметри). Отже, із досить великою точністю, можна вважати

$$\bar{\eta}(\bar{V}) = -\frac{\alpha_1}{Bb} \frac{(\bar{V}-1)^3}{3} + \frac{\bar{V}}{Bb} + C_1. \quad (3.84)$$

Константа інтегрування C_1 в розв'язку (3.84) легко визначається із граничної умови:

$$\bar{\eta}(\bar{V}=1)=0. \quad (3.85)$$

Із співвідношень (3.84) і (3.85) випливає

$$\bar{\eta}(\bar{V}) = \frac{1}{Bb} \left(-\frac{\alpha_1}{3} (\bar{V}-1)^3 + \bar{V}-1 \right). \quad (3.86)$$

Із рівняння (3.86) вже легко знайти обернену функцію $\bar{V} = \bar{V}(\bar{\eta})$. Єдиним із трьох розв'язків (3.86) дійсним є такий:

$$\bar{V}(\bar{\eta}) = \frac{\varphi(Bb, \bar{\eta})}{\alpha_1} - \frac{1}{\varphi(Bb, \bar{\eta})}, \quad (3.87)$$

$$\text{де } \varphi(Bb, \bar{\eta}) = \frac{1}{2} \left(\left(12Bb\bar{\eta} + 4\sqrt{\frac{9Bb^2\alpha_1\bar{\eta}^2 - 4}{\alpha_1}} \right) \alpha_1^2 \right)^{1/3}.$$

Але і він існує не для всіх значень $\bar{\eta}$. Розв'язок (3.87) отримано за формулами Картано. У тому разі, коли вираз всередині квадратного кореня є від'ємний, можна скористатися тригонометричним підходом до розв'язання (див. (1.8.8) в [74]). Коротко вкажемо як це зробити. Рівняння (3.86) можна переписати як

$$u^3 + pu + q = 0, \quad u = \bar{V} - 1, \quad p = -3/\alpha_1, \quad q = 3Bb\bar{\eta}/\alpha_1. \quad (3.88)$$

Рівняння (3.88) має такі три дійсні розв'язки [20, див. (1.8.8)]:

$$u_1 = 2\sqrt{-p/3} \cos(\alpha/3), \quad u_{2,3} = -2\sqrt{-p/3} \cos(\alpha/3 \pm \pi/3). \quad (3.89)$$

В розв'язках (3.89)

$$\cos(\alpha) = q / (2\sqrt{-(p/3)})^3.$$

Графік залежності $\bar{V} = \bar{V}(\bar{\eta})$, згідно із (3.89), показано на рис. 3.4 б.

Порівняння його із рис. 11 роботи [6] вказує на гарну відповідність.

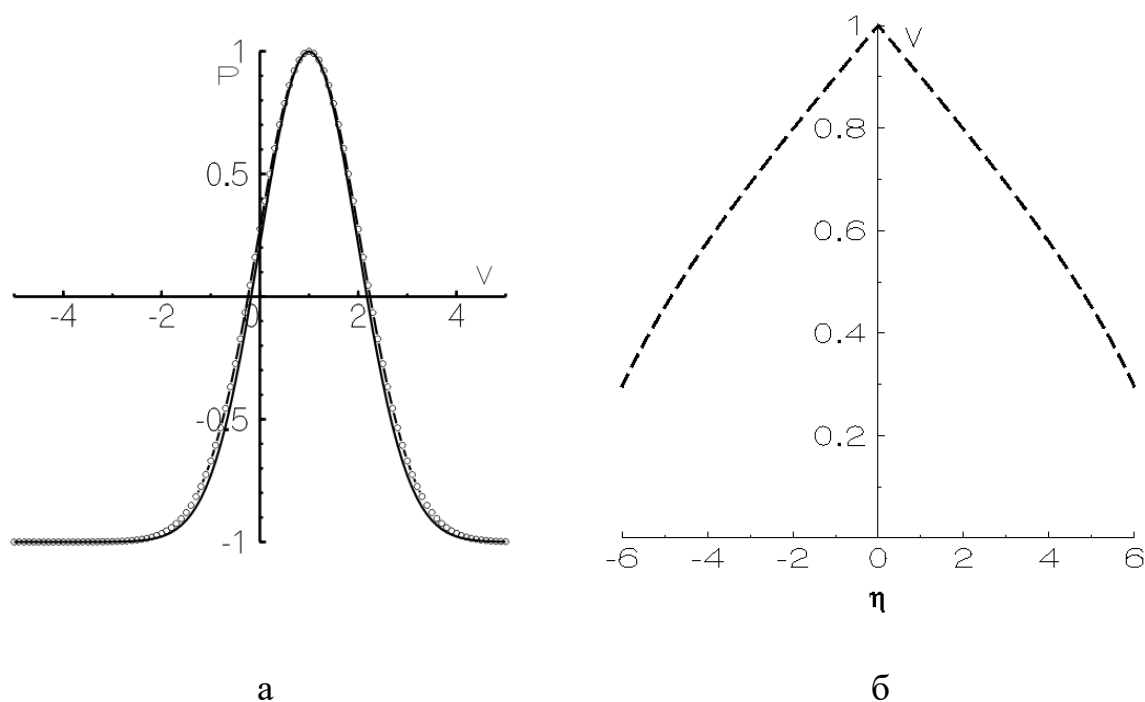


Рис. 3.4 а) Залежність збурень тиску від швидкості розповсюдження ударного імпульсу: суцільна лінія відповідає однорідній рідині, а маркери -- бульбашковій за значення параметру $\alpha_1=0.9$; б) швидкість поширення в ударному імпульсі.

Вочевидь пряме розв'язання системи (3.77—3.78) призведе до занадто громіздких виразів для функції тиску $\bar{p}'(\bar{\eta})$. Тому слід просто чисельно розв'язати систему рівнянь (3.75-3.76), що і зроблено далі як частинний випадок – без урахування тертя рідини о стінки.

3.2.4. Урахування тертя о стінку труби.

Врахуємо тепер ще й тертя рідини о стінку труби—класичну модель Вейсбаха-Дарсі [50, 118]. Як зазначено вище, за малої концентрації бульбашок, можна наближено апроксимувати це тертя той самою моделлю, що і в однорідній рідині. Матриця системи (3.72)--(3.73) виглядає вже так:

$$\begin{pmatrix} (1+\alpha_1\bar{p}')(\bar{V}-1) & 1 & \left| \bar{\lambda}(1+\bar{p}')\bar{V}|\bar{V}| \right| \\ (1+\bar{p}') & (\bar{V}-1) & Bb(1+\bar{p}') \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

Визначник матриці не змінився, а от Δ_1 і Δ_2 виглядають вже по-іншому:

$$\Delta_1 = (1 + \bar{p}')(\bar{\lambda}(\bar{V} - 1)\bar{V}|\bar{V}| - Bb), \quad \Delta_2 = (1 + \bar{p}')\left(Bb(1 + \alpha_1 \bar{p}')(\bar{V} - 1) - \bar{\lambda}\bar{V}|\bar{V}|(1 + \bar{p}')\right).$$

За методом Крамера, отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} = \frac{(\bar{\lambda}(\bar{V} - 1)\bar{V}|\bar{V}| - Bb)(1 + \bar{p}')}{(1 + \alpha_1 \bar{p}')(\bar{V} - 1)^2 - (1 + \bar{p}')}, \quad (3.91)$$

$$\frac{d\bar{p}'}{d\bar{\eta}} = \frac{(1 + \bar{p}')\left(Bb(1 + \alpha_1 \bar{p}')(\bar{V} - 1) - \bar{\lambda}\bar{V}|\bar{V}|(1 + \bar{p}')\right)}{(1 + \alpha_1 \bar{p}')(\bar{V} - 1)^2 - (1 + \bar{p}')}. \quad (3.92)$$

Скористаємося досвідом розв'язання попередньої задачі і спочатку знайдемо $\bar{p}' = \bar{p}'(\bar{V})$, вже потім $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\bar{V})$. Розділивши ліві та праві частини рівняння (3.92) на рівняння (3.91), отримуємо:

$$\frac{d\bar{p}'}{d\bar{V}} = \frac{Bb(1 + \alpha_1 \bar{p}')(\bar{V} - 1) + \bar{\lambda}\bar{V}^2(1 + \bar{p}')}{-\bar{\lambda}(\bar{V} - 1)\bar{V}^2 - Bb}, \quad \bar{V} \leq 0; \quad (3.93)$$

$$\frac{d\bar{p}'}{d\bar{V}} = \frac{Bb(1 + \alpha_1 \bar{p}')(\bar{V} - 1) - \bar{\lambda}\bar{V}^2(1 + \bar{p}')}{\bar{\lambda}(\bar{V} - 1)\bar{V}^2 - Bb}, \quad \bar{V} \geq 0; \quad (3.94)$$

Відповідні загальні розв'язки рівнянь (3.93) і (3.94) такі:

$$\bar{p}'(\bar{V} \leq 0) = \left(-\int \varphi_1 \frac{\bar{\lambda}\bar{V}^2 + Bb\bar{V} - Bb}{-\bar{\lambda}\bar{V}^3 + \bar{\lambda}\bar{V}^2 + Bb} d\bar{V} + C_1 \right) \varphi^{-1}, \quad (3.95)$$

$$\bar{p}'(\bar{V} \geq 0) = \left(\int \varphi_1 \frac{\bar{\lambda}\bar{V}^2 - Bb\bar{V} + Bb}{-\bar{\lambda}\bar{V}^3 + \bar{\lambda}\bar{V}^2 + Bb} d\bar{V} + C_1 \right) \varphi^{-1}, \quad (3.96)$$

де $\varphi(\bar{V} \leq 0) = \int \frac{\alpha_1 \bar{\lambda}(\bar{V} - 1)}{\bar{\lambda}\bar{V}^3 - \bar{\lambda}\bar{V}^2 + Bb} d\bar{V}$, $\varphi(\bar{V} \geq 0) = \int \frac{\alpha_1 \bar{\lambda}(\bar{V} - 1)}{-\bar{\lambda}\bar{V}^3 + \bar{\lambda}\bar{V}^2 + Bb} d\bar{V}$

Окрім розв'язків (3.95)--(3.96) у вигляді квадратур можна знайти також наближені розв'язки у вигляді рядів для $|\bar{V}-1| \leq (\approx 0.5)$. Для $\bar{V} \geq 0$ отримується, зважаючи на малість значень Bb і граничну умову $\bar{p}'(\bar{V}=1)=0$, таке наближення:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}'(\bar{V}) = & 1 + \frac{2\bar{\lambda}}{1+Bb}(\bar{V}-1) - \frac{Bb(\alpha_1 - 8\bar{\lambda} + 1) - 4\bar{\lambda}^2 - 4\bar{\lambda}}{2(1+Bb)^3}(\bar{V}-1)^2 + \\
 & - \frac{\bar{\lambda}}{6} \frac{(Bb(12\bar{\lambda}^2 + 7\alpha_1 - 60\bar{\lambda} - 13) - 12\bar{\lambda}^2 - 28\bar{\lambda} - 4)}{(1+Bb)^5}(\bar{V}-1)^3 - \\
 & - \frac{\bar{\lambda}}{24} \frac{(Bb(144\bar{\lambda}^3 + 40\alpha_1\bar{\lambda} - 248\bar{\lambda}^2 + 30\alpha_1 - 468\bar{\lambda} + 18))}{(1+Bb)^7} - \\
 & - 48\bar{\lambda}^3 - 184\bar{\lambda}^2 - 112\bar{\lambda}) \frac{\bar{\lambda}}{24} \frac{(\bar{V}-1)^4}{(1+Bb)^7}(\bar{V}-1)^4 - \frac{\bar{\lambda}}{120} \frac{1}{(1+Bb)^9} \times \\
 & \times (Bb(1440\bar{\lambda}^5 + 248\alpha_1\bar{\lambda}^2 + 512\bar{\lambda}^3 - 240\bar{\lambda}^4 + 468\alpha_1\bar{\lambda} - 5828\bar{\lambda}^2 - 1304\bar{\lambda}^3 + 52\alpha_1 - 1558\bar{\lambda} - \\
 & + 468\alpha_1\bar{\lambda} - 5828\bar{\lambda}^2 - 1304\bar{\lambda}^3 + 52\alpha_1 - 1558\bar{\lambda} - \\
 & . - 1600\bar{\lambda}^2 + 36) - 242\bar{\lambda})(\bar{V}-1)^5 + O((\bar{V}-1)^5). \tag{3.97}
 \end{aligned}$$

Для значень $\bar{V} \leq 0$ та граничної умови $\bar{p}'(\bar{V}=0)=0$ отримується таке наближення:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}'(\bar{V}) = & Bb\bar{V} - \frac{1}{2}Bb\bar{V}^2 + \frac{1}{3}(Bb+1)\bar{\lambda}\bar{V}^3 - \frac{1}{12}Bb\bar{\lambda}(\alpha_1+9)\bar{V}^4 + \\
 & + \frac{1}{5} \left(\frac{Bb\bar{\lambda}}{3}\alpha_1 + Bb\bar{\lambda}^2 - \bar{\lambda}^2 + \frac{3}{2}Bb\bar{\lambda} \right) \bar{V}^5 + O(\bar{V}^6). \tag{3.98}
 \end{aligned}$$

3.2.5. Порівняльний аналіз розв'язків для однорідної та бульбашкової рідин: вплив наявності бульбашок на поширення ударної хвилі.

Як зазначено у вступі, наявність бульбашок газу відповідальна за стисливість бульбашкової рідини [38]. Мабуть тому в моделях гідравлічного удару в бульбашковій рідині не приділено особливу увагу пружним деформаціям трубопроводу. Хоча на цю тему можна дискутувати (див. далі розділ Обговорення). Зосередимося зараз на результатах, що отримані чисельним інтегруванням системи рівнянь (3.91)--(3.92). На рис. 3.5 представлені відповідні значення функцій $\bar{p}'(\bar{\eta})$ та $\bar{V}(\bar{\eta})$. Особливістю цих кривих є те, що їх ліві частини відповідають процесу розтягнення бульбашок, а праві частини -- відповідно стисненню. Але суттєве переміщення максимуму $\bar{p}'(\bar{\eta})$ (див. рис. 3.4 г) з центру вказує на суперечливість припущення спадання функції $\bar{p}'(\bar{\eta})$ для всіх додатних значень аргументу. Шляхом підбору, було знайдено, що при $\bar{\lambda}=0.025$ отримується досить фізична картина, коли максимум поля збурень тиску практично (майже) не переміщується, а розподіл швидкості $\bar{V}(\bar{\eta})$ дуже гарно нагадує свій аналог у разі однорідної рідини (див. рис. 1 [84]). Єдиною різницею є те, як стало зрозумілим після порівняння із розв'язком (23) (див.[84]), що константи інтегрування в цитованому розв'язку можна обирати і так, аби графік $\bar{V}(\bar{\eta})$ мав якісну схожість із рис. 3. 6.

Обговорення

Явище гідравлічного удару є доволі складним. Воно відноситься до нестационарних течій рідини. Особливістю проходження ударного імпульсу в бульбашковій рідині є те, що стиснення середовища відбувається головним чином за рахунок деформації бульбашок газу. Наведені в роботі співвідношення, що характеризують бульбашкову рідину як одношвидкістний контінуум, є відомими [93]. Але математична складність зумовила те, що розглядались малі збурення, які відповідали лінійним моделям. Утім зміни тиску, що відбуваються у гнучких трубопроводах на літаках і вертольотах,

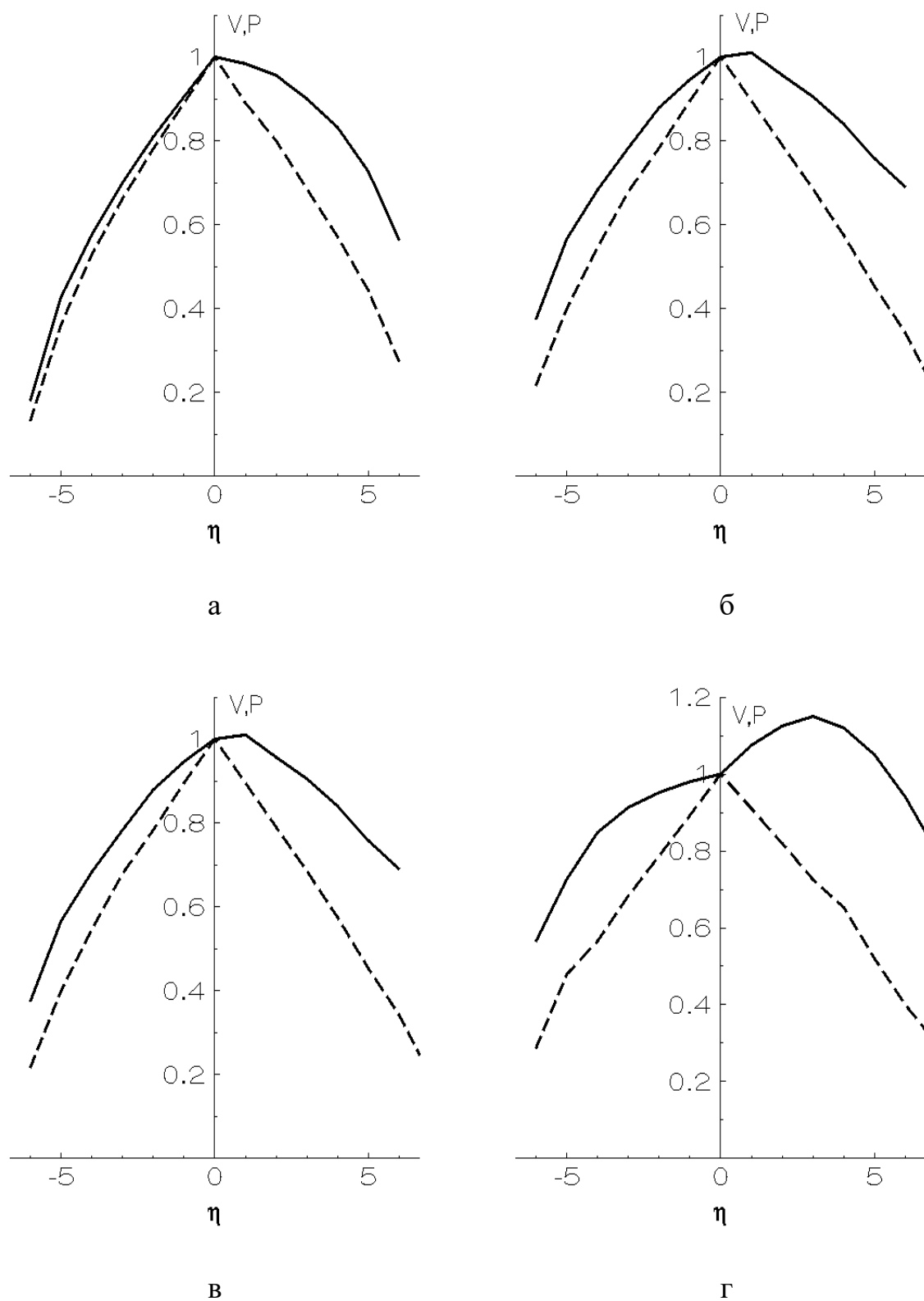


Рис. 3.5. Залежності поля швидкості та збурення тиску. $|Bb|=0.1$ (скрізь); а – $\bar{\lambda}=0.01$; б – $\bar{\lambda}=0.01$; в – $\bar{\lambda}=0.05$; г – $\bar{\lambda}=0.1$.

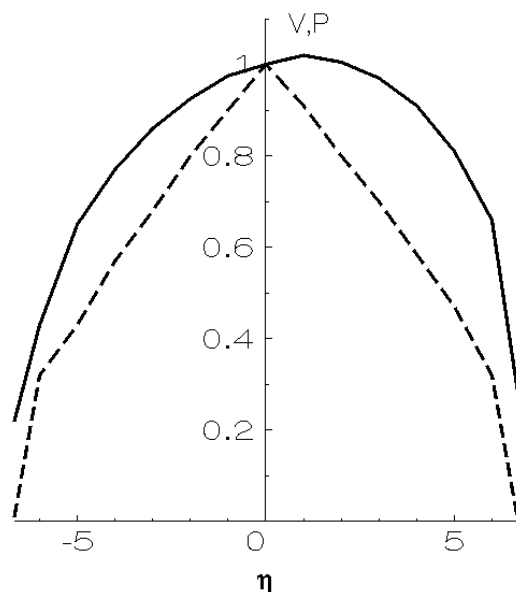


Рис. 3.6. Розподіл збурень тиску та поля швидкості, що найбільш узгоджуються із отриманими в попередніх роботах . Дані параметрів такі: $|Bb|=0.1$ $\bar{\lambda}=0.025$

сягають 75% від робочого значення. За таких обставин, припущення малості не має місця. Отже, в роботі розглянуті нелінійні моделі. Наявність у рідині домішок газу цілком вірогідна, оскільки у гідравлічній системі виникають кавітаційні явища, під час яких можливе потрапляння незначної кількості повітря крізь ущільнення. Отже, враховувати бульбашковість рідини доцільно, що підтверджується значними відмінностями досліджуваних в роботі процесів відповідно в одноріній та двофазній рідинах. З теоретичного (фізичного) боку, в моделі бульбашкової рідини радіальна швидкість деформації бульбашок вважається сталою величиною. На перший погляд може скластися враження, що це не так. Але, аналіз графічної інформації на рис. 2 і рис.3 свідчить про те, що дивергенція поля швидкості, яка фізично відповідає за стисливість, є приблизно сталою (графіки швидкості досить близькі до прямих ліній). Отже, швидкості стиснення-розширення є також приблизно сталими, що валідують модель. Іншим припущенням, яке використане у даній роботі, є незначна відмінність тертя Вейсбаха-Дарсі для однорідної та бульбашкової рідин. І дійсно, фізично несуперечливі результати отримуються лише за доволі малих (0.025) значень безрозмірного значення параметру тертя.

Висновки

В даному розділі, першому підрозділі, розглянуто явище нестационарної течії в крапельній рідині. Нестационарна течія по суті переносить ударний імпульс, хоча його і прийнято називати ударною хвилею. Відштовхуючись від попередніх робіт авторів, та враховуючі досягнення інших, було проведено аналітичне дослідження нелінійних та в'язких ефектів під час поширення ударної хвилі. Молекулярна в'язкість, як з'ясувалося, істотна лише в тонкому ударному шарі, на фронті хвилі. А от механізм конвекції кількості руху (поле швидкості) слід враховувати в усій області існування ударної хвилі. Як з'ясувалося, для крапельної рідини можна знайти, в рамках нев'язкого наближення, аналітичне співвідношення між функцією тиску та функцією швидкості. Отримані аналітичні розв'язки систем диференціальних рівнянь, які описують моделі гідравлічного удару як без урахування в'язких ефектів, так із урахуванням їх. Наведено порівняння отриманих результатів із результатами інших робіт.

У другому підрозділі даного розділу сформульовано та розв'язано задачу про нестационарну течію (поширення ударної хвилі) краплинній рідині, що містить незначну кількість бульбашок (бульбашкова рідина). Запропонована проста одновимірна гідравлічна модель поширення ударної хвилі (імпульсу) у бульбашковій рідині. На відміну від класичних уявлень (розв'язків) про гідравлічний удар, який складається із двох хвиль протилежних напрямків поширення, ударний імпульс являє собою область збурень тиску, в якій швидкість руху частинок рідини також є змінною – від максимального значення до майже нульового. Застосування оригінального методу щодо розв'язання нелінійної системи рівнянь моделі дозволило знайти аналітичний розв'язок – залежність поля збурень тиску від швидкості проходження ударного імпульсу. Кількісний аналіз указує на те, що зміни тиску в 100--200 атм. не перевищують 1% від теоретично максимально допустимих (2ГПа).

Іншою можливою нестационарною течією може бути така, де розподіл швидкості є суттєво змінним у просторі і може сягати нульового значення. фактично, це означає «розмитість» ударного імпульсу. Отримані дані узгоджуються із попередніми результатами [84]. Форма розподілу швидкості (рис. 3.1) нагадує відповідну форму, представлену на рис. 1 в [84] для однорідної рідини. Відмінність у тому, що для бульбашкової рідини область ударного імпульсу у 10--12 разів перевищує за протяжністю відповідну для однорідної рідини.

У якості подальших досліджень можна вдосконалювати модель, а також використовувати отриманні в даній роботі результати для більш точного моделювання формування та поширення ударного імпульсу у багатофазному середовищі, яким є бульбашкова рідина

Глава 4. НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕЧІЇ РІДИНИ ЗІ СТРУКТУРОЮ В ГІДРАВЛІЧНИХ СИСТЕМАХ ЛІТАКІВ ТА ВЕРТОЛЬОТІВ

В даному розділі використовуються суто теоретичні методи дослідження: поняття автомодельного рівняння та системи рівнянь, балансів сил, що діють на частинки рідини та твердого тіла, а також стандартний метод зведення системи рівнянь до одного – еквівалентного рівняння.

Формулювання задачі

Розробити нелінійну модель взаємодії нестационарної течії рідини із гнучким трубопроводом, яка враховує конвекцію поля швидкості рідини, тертя рідини о стіну (як стаціонарне, так і нестационарне).

Отримати автомодельний розв'язок, що містить у собі аналітичні вирази для полів швидкостей руху рідини та труби, а також збурень тиску і подовжніх напружень у трубі.

На підставі отриманого розв'язку дослідити:

- вплив конвекції поля швидкості рідини;
- вплив стаціонарного тертя;
- вплив нестационарного тертя.

4.1. Автомодельний розв'язок лінійної моделі взаємодії нестационарної течії рідини із пружною оболонкою

Система рівнянь (1.18)--(1.21) легко зводиться до чотирьох автомодельних рівнянь відносно автомодельної змінної:

$$\eta(z, t) = z - ct. \quad (4.1)$$

Маємо таку систему рівнянь

$$-c \frac{dV}{d\eta} + \frac{1}{\rho_f} \frac{dp}{d\eta} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{dV}{d\eta} - \left(\frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) c \frac{dp}{d\eta} = 2\nu \frac{dU}{d\eta}, \quad (4.3)$$

$$-c \frac{dU}{d\eta} - \frac{1}{\rho_t} \frac{d\sigma_z}{d\eta} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{dU}{d\eta} + \frac{c}{E} \frac{d\sigma_z}{d\eta} = \frac{c\nu R}{Ee} \frac{dp}{d\eta}. \quad (4.5)$$

Виключимо із (4.2)--(4.3) швидкість V , а із (4.4)--(4.5) напруження σ_z .

Отримаємо таку систему рівнянь:

$$\left[\frac{1}{\rho_f} - c^2 \left(\frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \right] \frac{dp}{d\eta} = 2\nu c \frac{dU}{d\eta}, \quad (4.6)$$

$$\left(1 - \frac{\rho_t c_f^2}{E} \right) \frac{dU}{d\eta} = \frac{\nu R c_f}{Ee} \frac{dp}{d\eta}. \quad (4.7)$$

Із системи рівнянь (4.6)--(4.7) можна виключити тиск і тоді отримується таке рівняння для швидкості руху частинок труби:

$$\left[\frac{1}{\rho_f} - c^2 \left(\frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \right] \frac{e}{\nu R} \left(\frac{E}{c} - c\rho_f \right) \frac{dU}{d\eta} = 2\nu c \frac{dU}{d\eta}. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) цікаве тим, що воно з одного боку, вказує на можливість існування сталої швидкості поширення збурень всередині твердого тіла (труби), а з іншого боку надає можливість знайти ці швидкості. Математичною мовою (4.8) еквівалентне об'єднанню двох таких рівнянь:

$$\left[\frac{1}{\rho_f} - c^2 \left(\frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \right] \frac{e}{\nu R} \left(\frac{E}{c} - c\rho_t \right) = 2\nu c,$$

$$\frac{dU}{d\eta} = 0. \quad (4.9)$$

Якщо проаналізувати множину розв'язків системи (4.9), то виходить, що частинки труби можуть рухатися за будь якої сталої швидкості. Це може бути зумовлено нестационарним рухом рідини, точніше її швидкістю. Поширення ударного імпульсу, або просто нестационарного імпульсу, викликає поширення імпульсу в трубі. З іншого боку, якщо швидкість руху частинок труби відповідає розв'язку першого рівняння (4.9), то вона ніби може бути неоднаковою, тобто функцією автомодельної змінної. Але це не можливо, бо перше рівняння дає лише сталі значення для поширення хвилі збурень. Отже, залишилося лише знайти ці значення.

Перше рівняння (4.9) можна записати у більш компактному (зручному) вигляді:

$$B\rho_t c^4 - \left(\frac{\rho_t}{\rho_f} + BE + D \right) c^2 - \frac{E}{\rho_f} = 0, \quad (4.10)$$

$$\text{де } B = \frac{1}{K} + (1 - v^2) \frac{2R}{Ee}, \quad D = \frac{2v^2 R}{e}.$$

Оскільки дискримінант бікватратного рівняння (4.10) має вигляд

$$Dis = \left(\frac{\rho_t}{\rho_f} - BE \right)^2 + 2 \left(\frac{\rho_t}{\rho_f} + BE \right) D + D^2 > 0,$$

то квадрат швидкості c^2 має бути дійсним. Аналіз значень дає підставу для твердження про наявність чотирьох значень швидкості:

двох додатних

$$c_1 = \left[\left(\left(\frac{\rho_t}{\rho_f} + BE + D \right) + \sqrt{Dis} \right) / 2B\rho_t \right]^{1/2},$$

$$c_3 = \left[\left(\left(\frac{\rho_t}{\rho_f} + BE + D \right) - \sqrt{Dis} \right) / 2B\rho_t \right]^{1/2},$$

та двох від'ємних (17)

$$c_2 = - \left[\left(\left(\frac{\rho_t}{\rho_f} + BE + D \right) + \sqrt{Dis} \right) / 2B\rho_t \right]^{1/2},$$

$$c_4 = - \left[\left(\left(\frac{\rho_t}{\rho_f} + BE + D \right) - \sqrt{Dis} \right) / 2B\rho_t \right]^{1/2}.$$

Отже, рух стінки труби може відбуватися із двома швидкостями у напрямку проходження імпульсу, а також у протилежному (від'ємні значення швидкості) – із тими ж самими абсолютними значеннями швидкостей. Це повністю узгоджується із теорією гідравлічного удару, починаючи з роботи [101], а також сучасних робіт [110], де знайдено також чотири різних значення швидкості. Покажемо це.

Якщо переписати рівняння (4.10) у вигляді ідентичному рівнянню (24) [110], тобто залишивши множник 1 при доданку c^4 , то матимемо:

$$c^4 - \left(\frac{\rho_t}{\rho_f} + BE + D \right) / B\rho_t c^2 - \frac{E}{\rho_f B\rho_t} = 0. \quad (4.11)$$

Легко переконатися, що в рівнянні (4.11) коефіцієнт при c^2 дорівнює:

$$\begin{aligned}
& - \left(\left(\frac{\rho_t}{\rho_f} + \frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) E + \frac{2\nu^2 R}{e} \right) / \left(\frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) = \\
& = \frac{1 + \frac{2\nu^2 R}{e} \frac{\rho_f}{\rho_t}}{\rho_f \left(\frac{\rho_t}{\rho_f} + \frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right)} + \frac{E}{\rho_t}. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Права частина виразу (4.12) повністю збігається із виразом (25) [110], хіба що $\rho_t = \rho_s$: індекс tube (труба) замінено на більш загальний -- structure (структура). Повний збіг також і для множника при вільному від степеня доданку:

$$\frac{E}{\rho_f B \rho_t} = \frac{E}{\rho_f \rho_t \left(\frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right)}. \quad (4.13)$$

Для цього достатньо порівняти вираз (4.13) із співвідношеннями (23) і (24) [110]. Отже, у явному вигляді доведено, що отримане рівняння та його розв'язок збігаються із вже відомими, але метод отримання при цьому є значно простішим.

Перейдемо тепер до більш загальної моделі, яка дає змогу вивчити вплив конвекції рідини та тертя рідини о стінку на взаємодію рідини зі структурою (трубою).

4.2. Узагальнена модель взаємодії течії зі структурою: урахування конвекції, стаціонарного та нестаціонарного тертя.

Попередні дослідження [26,84,85] показали, що для коротких трубопроводів із малим поздовжнім просторовим масштабом конвекція не є нехтовно малою і також тертя рідини о стінку може змінювати картину течії. Для урахування впливу того чи іншого чинника зручно перейти до

безрозмірних величин. Але спочатку наведемо рівняння збереження кількості руху, яке тепер вже має вигляд:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\lambda}{4R} V |V| + kD \left(\frac{\partial V}{\partial t} + c \cdot \text{sign}(V) \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| \right) = 0. \quad (4.14)$$

Четвертий доданок у рівняння (4.14) відповідає складової стаціонарного тертя Вейсбаха - Дарсі [50,117], а п'ятий доданок взято з моделі Вітковського – Бруно [39]. Згідно із цією моделлю,

$$f = f_q + \frac{kD}{V|V|} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + c \cdot \text{sign}(V) \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| \right) \quad (4.15)$$

В формулі (4.15) D -- внутрішній діаметр труби; R -- радіус труби; c – швидкість звуку в рідині; k -- коефіцієнт, який визначається через коефіцієнт Варді C^* [113]:

$$k = \frac{\sqrt{C^*}}{2} = \begin{cases} 0.5\sqrt{0.00476}, & \text{ламінарна течія;} \\ 7.41 \cdot \text{Re}^{-\left(\log 14.3/\text{Re}^{0.05}\right)}, & \text{турбулентна течія.} \end{cases}$$

Порівняння (4.15) із (4.14) вказує на те, що

$$f_q = \frac{\lambda L}{4R}.$$

Решта рівнянь, тобто (1.19)-(1.21), залишаються незмінними. Для переходу до безрозмірних величин потрібно виділити баланси доданки в рівняннях [84,85]. Так в рівнянні (4.15) балансними доданками будуть ті, що складають спрощену модель, тобто рівняння (1.18), -- без урахування конвекції і тертя. Отже,

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t} \right] = \left[\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial z} \right]. \quad (4.16)$$

У рівнянні (4.16), і далі теж, квадратні дужки означають масштаб величини. Рівняння (4.16) еквівалентне

$$\frac{[V]}{[t]} = \frac{[V]^2}{[z]} = \frac{1}{\rho_f} \frac{[p]}{[z]}.$$

Звідки

$$[p] = \rho_f [V]^2 \quad (4.17)$$

Поділимо всі доданки рівняння (4.14) на масштаб балансних доданків, тобто на $[V]^2/[z]$. Отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + DW \cdot \bar{V} |\bar{V}| + Br \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + \text{sign}(\bar{V}) \left| \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} \right| \right) = 0. \quad (4.18)$$

В рівняння (4.18) риска над величиною означає її без розмірність. На честь тих, хто досліджував відповідні процеси, введемо числа Дарсі - Вейсбаха (DW) та Бруно (Br):

$$DW = \frac{\lambda L}{4R}, \quad Br = \frac{kD}{L}.$$

Перейдемо тепер до отримання безрозмірного аналогу рівняння (1.19). В ньому присутня нова невідома – швидкість руху точок труби U . Масштабом цієї швидкості будемо вважати швидкість звуку в трубі c_t . Враховуючи щойно сказане, рівняння (1.19) має такий безрозмірний вигляд:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} + Nu_1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} = Nu_2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}. \quad (4.19)$$

В рівнянні (4.19) використанні такі безрозмірні параметри:

$$Nu_1 = \left[\frac{1}{K} + (1 - v^2) \frac{2R}{eE} \right] \rho_f c_f^2, \quad Nu_2 = \frac{2vc_t}{c_f}.$$

Безрозмірний аналог рівняння (1.20) має вигляд:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (4.20)$$

В рівнянні (4.20) лише два доданки, тому вони створюють баланс і мають однаковий порядок. З цих міркувань отримується масштаб повздовжніх напружень:

$$[\sigma_z] = \rho_t c_f c_t. \quad (4.21)$$

Якщо використати вираз для масштабу повздовжніх напружень (4.21) і підставити, разом із вже вищезазначеними масштабами, в рівняння (1.21), то отримаємо:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} - \text{Nu}_3 \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial \bar{t}} = -\text{Nu}_4 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}}. \quad (4.22)$$

Безрозмірні параметри в (4.22) мають такий вигляд:

$$\text{Nu}_3 = \frac{\rho_t c_f^2}{E}, \quad \text{Nu}_4 = \frac{\nu R}{e} \frac{c_f}{c_t} \frac{c_f^2 \rho_f}{E}.$$

Отже, отримана система безрозмірних рівнянь (4.18,4.19,4.20,4.22), яка враховує як конвекцію поля швидкості рідини, так і тертя рідини о стінку -- стаціонарне разом із нестаціонарним.

4.3. Формування ударного імпульсу: автомодельні рівняння та їх розв'язки

Як вже зазначалося у вступі, для чисельного розв'язання задачі поширення ударної хвилі в областях зі складною геометрією та в простих областях але з урахуванням відбиття та взаємодії хвиль, вкрай важливо знати структуру полів всіх характеристик в умовно початковий момент часу коли вже сформувався ударний імпульс. В даному разі зручно знову перейти до автомодельної змінної, але тепер вже у безрозмірному вигляді:

$$\bar{\eta}(\bar{z}, \bar{t}) = \bar{z} - \bar{t}. \quad (4.23)$$

Підстановка виразу (4.23) в рівняння (4.18), (4.19), (4.20), (4.22) перетворює їх на таку систему:

$$-\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \frac{d\bar{p}}{d\bar{\eta}} + DW \cdot \bar{V} |\bar{V}| + Br \left(-\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \text{sign}(\bar{V}) \left| \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} \right| \right) = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} - Nu_1 \frac{d\bar{p}}{d\bar{\eta}} = Nu_2 \frac{d\bar{U}}{d\bar{\eta}}. \quad (4.25)$$

$$-\frac{d\bar{U}}{d\bar{\eta}} = \frac{d\bar{\sigma}_z}{d\bar{\eta}}, \quad (4.26)$$

$$\frac{d\bar{U}}{d\bar{\eta}} + Nu_3 \frac{d\bar{\sigma}_z}{d\bar{\eta}} = Nu_4 \frac{d\bar{p}}{d\bar{\eta}}. \quad (4.27)$$

До системи рівнянь (4.24-4.27) слід ще додати чотири умови щодо шуканих функцій. Зручно використати значення функцій на характеристиках, тобто при значенні автомодельної змінної нуль. Це буде зроблено вже після знайдення загального розв'язку системи (4.24-4.27).

Метод розв'язання (4.24-4.27) – звичайний: виключення невідомих функцій і зведення системи до одного рівняння. Перевага використання автомодельної змінної полягає в тому, що немає потреби підвищувати порядок системи, тобто додатково брати частинні похідні від рівнянь.

Перший крок полягає в тому, що виражаємо тиск через швидкості із рівняння (4.25):

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\eta}} = \frac{1}{Nu_1} \left(\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} - Nu_2 \frac{d\bar{U}}{d\bar{\eta}} \right). \quad (4.28)$$

Підставивши (4.28) в (4.24), отримаємо:

$$\begin{aligned}
& -\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \frac{1}{Nu_1} \left(\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} - Nu_2 \frac{d\bar{U}}{d\bar{\eta}} \right) + DW \cdot \bar{V} |\bar{V}| + \\
& + Br \left(-\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \text{sign}(\bar{V}) \left| \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} \right| \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

У якості другого кроку зручно виключити повздовжні напруження в трубі із рівнянь (4.26)--(4.27) – разом із використанням співвідношення (4.28):

$$\frac{d\bar{U}}{d\bar{\eta}} - Nu_3 \frac{d\bar{U}}{d\bar{\eta}} = \frac{Nu_4}{Nu_1} \left(\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} - Nu_2 \frac{d\bar{U}}{d\bar{\eta}} \right),$$

або, зібравши доданки при однакових похідних, маємо:

$$\left(1 - Nu_3 + \frac{Nu_4 Nu_2}{Nu_1} \right) \frac{d\bar{U}}{d\bar{\eta}} = \frac{Nu_4}{Nu_1} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}}. \tag{4.30}$$

Система рівнянь (4.29)--(4.30) містить вже лише дві шукані функції – швидкості точок рідини і труби. Оскільки процес поширення хвилі в трубі описується лінійним рівнянням, то зручно виключити саме швидкість частинок труби. У компактному вигляді можна написати:

$$\frac{d\bar{U}}{d\bar{\eta}} = Nu^* \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}}, \tag{4.31}$$

$$\text{де } Nu^* = \frac{Nu_4}{Nu_1} / \left(1 - Nu_3 + \frac{Nu_4 Nu_2}{Nu_1} \right).$$

Об'єднуючи рівняння (4.31) та (4.29), маємо:

$$-\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \frac{(1 - Nu_2 Nu^*)}{Nu_1} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + DW \cdot \bar{V} |\bar{V}| + Br \left(-\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \text{sign}(\bar{V}) \left| \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} \right| \right) = 0. \tag{4.32}$$

Рівняння (4.32) вже містить лише одну шукану функцію і по суті еквівалентне системі рівнянь (4.27)-(4.29). Аби вже остаточно отримати

«робоче» рівняння, додамо в (4.32) два «перемикачі» знаків – множники SW1 та SW2. Отже, маємо:

$$\left(SW1 \cdot B^* + \bar{V} \right) \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + SW2 \cdot DW \cdot \bar{V}^2 = 0. \quad (4.33)$$

Вирази для SW1 та SW2 легко отримати порівнянням (4.32) з (4.33). Їх явний вигляд такий:

$$SW1 \cdot B^* = \begin{cases} -1 + \frac{1 - Nu_2 Nu^*}{Nu_1}, & \text{при } V \cdot \frac{d\bar{V}}{d\eta} > 0; \\ -1 + \frac{1 - Nu_2 Nu^*}{Nu_1} - 2Br, & \text{при } V \cdot \frac{d\bar{V}}{d\eta} < 0. \end{cases}$$

$$SW2 = \text{sign}(\bar{V}) = \begin{cases} 1, & \bar{V} > 0; \\ -1, & \bar{V} < 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок рівняння (4.33) такий:

$$\bar{V}(\bar{\eta}) = \exp \left[-DW \cdot SW2(C_1 + \bar{\eta}) + \text{LambertW} \left(SW1 \cdot B^* \exp \left[DW \cdot SW2(C_1 + \bar{\eta}) \right] \right) \right]. \quad (4.34)$$

Той факт, що не було підвищено порядок диференціальних рівнянь, тепер дозволяє легко знайти решта шуканих функцій. Ними є:

$$\bar{U}(\bar{\eta}) = Nu^* \bar{V}(\bar{\eta}) + \text{Const}_1, \quad \bar{\sigma}_z(\bar{\eta}) = -Nu^* \bar{V}(\bar{\eta}) + \text{Const}_2,$$

$$\bar{p}(\bar{\eta}) = \frac{1}{Nu_1} (1 - Nu_2) \bar{V}(\bar{\eta}) + \text{Const}_3. \quad (4.35)$$

Константи інтегрування в (4.33)-(4.35) зручно визначати, починаючи із частинних випадків, тобто більш простих моделей. Отже, використання автотемпературної змінної дозволило отримати найпростіший вигляд розв'язку

нелінійної задачі сумісного поширення хвилі в пружній оболонці із нестисливою рідиною, що перебуває в нестационарному русі (гідравлічний удар).

4.4. Вплив конвекції та тертя на взаємодію нестационарної течії зі структурою

Урахування лише конвекції.

У даному разі в рівнянні (4.24) параметри

$$DW=0, \quad Br=0.$$

Рівняння (4.32), яке є еквівалентним системі рівнянь, спрощується до такого:

$$-\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \frac{(1 - Nu_2 Nu^*)}{Nu_1} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} = 0,$$

або до зручного для розв'язку вигляду:

$$\left(\bar{V} - 1 + \frac{(1 - Nu_2 Nu^*)}{Nu_1} \right) \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} = 0. \quad (4.36)$$

Розв'язком рівняння (4.36) може бути лише стале значення швидкості поширення імпульсу в рідині. Очевидно, що

$$\bar{V} = 1 - \frac{(1 - Nu_2 Nu^*)}{Nu_1}. \quad (4.37)$$

Як свідчить формула (4.37), швидкість поширення ударного імпульсу в рідині відрізняється, у безрозмірних величинах, на певне значення, яке залежить від трьох параметрів, що є функціями характеристик системи «рідина-труба». Решта характеристик системи знаходяться за формулами (4.35). Як легко бачити, вони теж мають сталі значення. Отже, конвекція в полі швидкості

рідини лише змінює значення швидкості поширення ударного імпульсу, але функціональний характер (стале значення) – ні.

Зупинимося ще на одному цікавому питанні: чи досягає функція швидкості, вираз (4.37),

$$\bar{V} = \bar{V}(Nu_1, Nu_2, Nu^*)$$

локального або глобального екстремумів? Згідно із теорією [74], необхідними умовами екстремуму функції кількох змінних є:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial Nu_1} = \frac{1 - Nu_2 Nu^*}{Nu_1^2} = 0, \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial Nu_2} = \frac{Nu^*}{Nu_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial Nu^*} = \frac{Nu_2}{Nu_1} = 0. \quad (4.38)$$

Оскільки третє рівняння (4.38) ніколи не виконується, то цього вже достаньо аби зробити висновок: ніякого екстремуму функції швидкості поширення ударного імпульсу в рідині не існує.

Урахування лише стаціонарного тертя.

Якщо не враховувати конвективний доданок та нестаціонарне тертя, то тоді рівняння (4.32) матиме такий вигляд:

$$-\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \frac{(1 - Nu_2 Nu^*)}{Nu_1} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + DW \cdot \bar{V} |\bar{V}| = 0. \quad (4.39)$$

Розв'язком рівняння (4.39) є така функція:

$$\bar{V}(\bar{\eta}) = \begin{cases} \exp\left[-fc(C_1 + \bar{\eta}) + LW \left(\frac{(1 - Nu_2 Nu^*)}{Nu_1} \exp[fc(C_1 + \bar{\eta})] \right)\right], & \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\eta} > 0; \\ \exp\left[-fc(C_1 + \bar{\eta}) + LW \left(\frac{(1 - Nu_2 Nu^* - 2Nu_1)}{Nu_1} \exp[fc(C_1 + \bar{\eta})] \right)\right], & \\ \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\eta} < 0. \end{cases} \quad (4.40)$$

В (4.40) $fc = DW \cdot \text{sign}(\bar{V})$, $LW = \text{LambertW}$.

Урахування нестационарного тертя або конвекції та стаціонарного тертя.

У разі врахування одночасно як стаціонарного так і нестационарного тертя рідини о трубу, але нехтування конвективним доданком, маємо:

$$-\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \frac{(1 - Nu_2 Nu^*)}{Nu_1} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + DW \cdot \bar{V} |\bar{V}| + Br \left(-\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + c \cdot \text{sign}(\bar{V}) \left| \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} \right| \right) = 0. \quad (4.41)$$

А рівняння (4.36), яке зручніше використати зараз, перетвориться на таке:

$$SW1 \cdot B^* \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + SW2 \cdot DW \cdot \bar{V}^2 = 0. \quad (4.42)$$

Загальним розв'язком рівняння (4.42) є:

$$\bar{V}(\bar{\eta}) = \frac{1}{C_1 + DW \cdot SW2 / (SW1 \cdot B^*) \cdot \bar{\eta}}.$$

І хоча цей розв'язок має вже відомий гіперболічний розподіл (порівняйте із (13) з роботи [107]), все ж таки є проблема з його використанням. Якщо задовільнити умову

$$\bar{V}(\bar{\eta}=0)=1,$$

то отримаємо явний вигляд:

$$\bar{V}(\bar{\eta}) = \frac{1}{1 + DW \cdot SW2 / (SW1 \cdot B^*) \cdot \bar{\eta}}. \quad (4.43)$$

При розрахункових значення параметрів в формулі (4.43) отримується від'ємне значенні при автомоделній змінній, яке призводить до протиріччя із умовою, з якої (4.43) було отримано: при зростанні автомоделної змінної швидкість не спадає, як це відповідає загальному розв'язку, а навпаки – зростає. Із цього можна зробити простий висновок: відкидати конвективне прискорення і утримувати лише тертя в моделі не можна.

Нарешті, дамо відповідь на питання про вплив нестационарного тертя. Для цього розглянемо ще один частинний випадок (4.32), коли враховується стаціонарне тертя та конвекція і порівняємо отримані результати із загальним розв'язком. Рівняння (4.32) перетворюється у даному разі на таке:

$$-\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \frac{(1 - Nu_2 Nu^*)}{Nu_1} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + DW \cdot \bar{V} |\bar{V}| = 0. \quad (4.44)$$

Розв'язок рівняння (4.44) є частинним випадком (4.34) при $Br=0$. Результати обчислено за (4.44) представлені на рис. 4.1.

Для обрахунків були використані такі значення:

$$DW = 1.25, SW \cdot B^* = -0.2543; SW \cdot B^* = -0.21,$$

$$Nu_1 = 1.0825, Nu_2 = 1.7233, Nu_3 = 0.10456,$$

$$Nu_4 = 0.096, Nu^* = 0.08462, C_1 = -0.18.$$

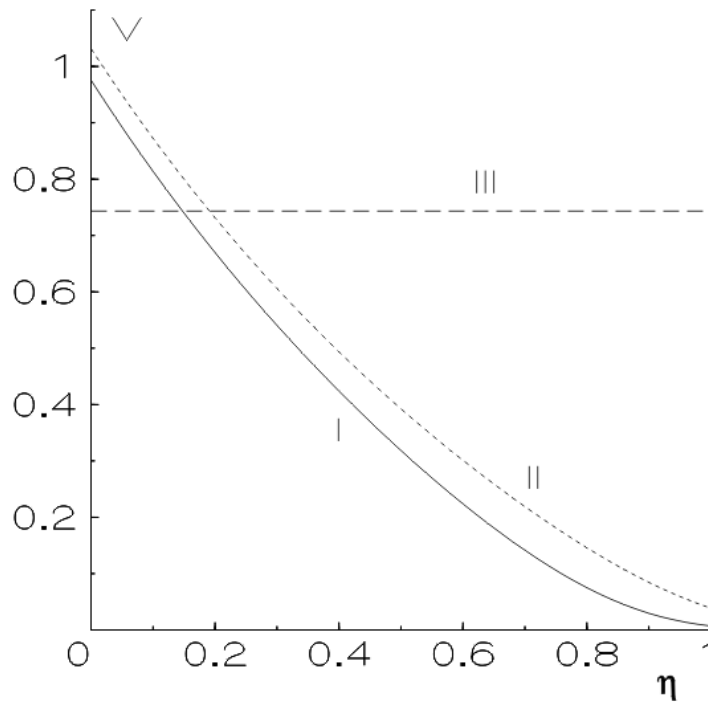


Рис. 4.1. Безрозмірна швидкість поширення ударного імпульсу в воді: I— загальний розв’язок (формула (4.34)); II- без урахування нестационарного тертя (формула (4.34), частинний випадок $Br=0$); III – без урахування тертя (формула (4.37)).

З рис. 4.1 видно, що за моделлю, яка враховує лише конвекцію і не враховує тертя, отримується занижене стає значення (крива III) для швидкості поширення ударного імпульсу (гідравлічний удар). Нехтування нестационарною складовою тертя надає трохи більші (крива II), ніж у порівнянні з повною моделлю, значення.

Оскільки в авіаційній техніці під високим тиском знаходиться саме мастило, для нього також були проведені обрахунки. Для АМГ-10 отримуються такі значення безрозмірних параметрів:

$$DW=6.4; SW1 \cdot B^* = -0.21; C_1 = -0.033.$$

Функціональна залежність розподілу швидкості поширення ударного імпульсу в мастилі (див. рис. 4. 2) свідчить про суттєву, у порівнянні із водою, концентрацію області ненульових значень – приблизно у чотири рази. Отже,

поєднання в'язкості із конвекцією у випадку нестационарної течії може призводити до концентрації енергії у скінченій області.

Обговорення

Поширення ударної хвилі або точніше ударного імпульсу як прикладу нестационарної течії можна розглядати у рамках різних моделей. Для довгих трубопроводів, де просторовий масштаб є великим, конвективний доданок в рівнянні збереження кількості руху рідини є несуттєвим. Але в технічних пристроях, зокрема в авіаційній техніці, довжина трубопроводу є не значною. Тож врахування конвекції є доцільним. Крім того, трубопроводи, по яких тече рідина, не є абсолютно жорсткими і імпульс тиску викликає рух частинок трубопроводу. З фізичної точки зору маємо задачу взаємодії течії зі структурою. Наявні джерела вказують на відсутність моделей де одночасно враховується конвекція поля швидкості рідини та сучасні моделі щодо опису тертя рідини о трубу. Крім того, підхід, що використовується для розв'язку математичної задачі, базується на додатковому диференціюванні рівнянь, що призводить (може призвести) до розширення множини розв'язків задачі. Ці розв'язки можуть бути нефізичними, точніше не відповідати вихідній системі диференціальних рівнянь. Альтернативою такому підходу є використання автомодельних рівнянь. Хоча це використання має обмеження у часі (доцільне лише для початкового поширення збурень, поки вони не зустрічають на своєму шляху межі), функціональні залежності, які отримуються, дуже важливі для задання умовно початкових розподілів всіх величин для подальшого чисельного розв'язання задачі.

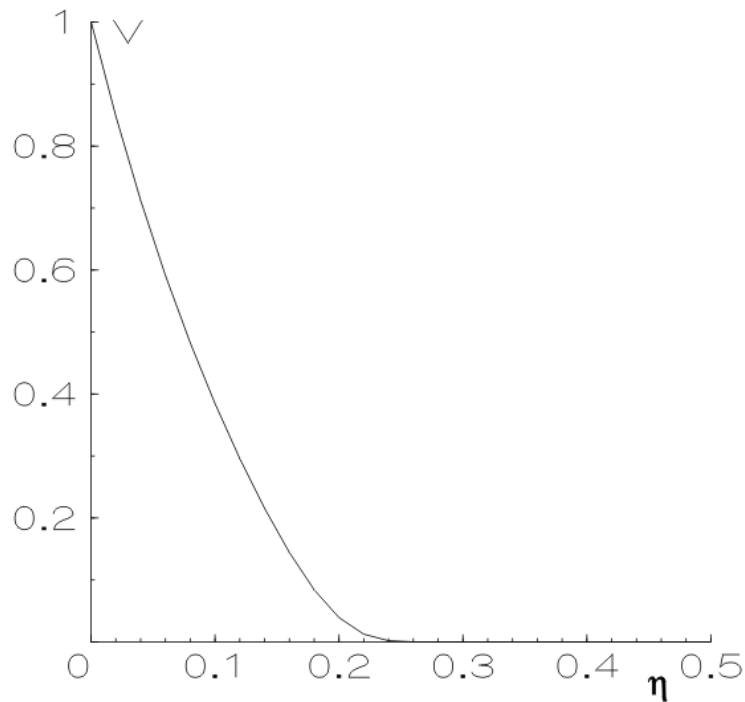


Рис. 4.2. Безрозмірна швидкість поширення ударного імпульсу в авіаційному мастилі АМГ-10.

4.5 Порівняння стандартного та нестандартного підходів врахування конвекції, стаціонарного та нестаціонарного тертя у моделі взаємодії нестаціонарної течії з пружною оболонкою.

Застосування автомодельності для аналітичного розв'язання нелінійної системи за допомогою стандартного методу виключення

Розглянемо повну систему рівнянь, що включає конвекцію поля швидкості, стаціонарне та нестаціонарне тертя та описує взаємодію нестаціонарної течії (гідравлічний удар) зі структурою (трубою) [85]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\lambda}{4R} V |V| + k \frac{D}{L} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + c \cdot \text{sign}(V) \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| \right) = 0. \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \left(\frac{1}{K} + (1 - \nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = 2\nu \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = -\frac{\nu R}{Ee} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (4.48)$$

У системі рівнянь багато позначень ідентичні роботі [110]. Відмінність у тому, що буквою U тут позначено не відхилення частинок твердого тіла від рівноважного положення, а поздовжня швидкість. Четвертий і п'ятий доданки у першому рівнянні відповідають стаціонарному тертю Дарсі-Вейсбаха [50,118] та нестаціонарному тертю за моделлю Бруно-Витковського [39,115].

Класичний, або загально використовуваний метод виключення полягає у диференціювання (частинному) рівнянь (4.45)-(4.48). Застосуємо цей підхід.

Для виключення тиску необхідно отримати в кожному з рівнянь (4.45)-(4.48) змішану похідну:

$$\partial^2 p / \partial t \partial z$$

Виконаємо вказану процедуру:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial z} + V \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial z} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} + \frac{\lambda}{2R} \text{sign}(V) V \frac{\partial V}{\partial t} + k \frac{D}{L} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + c \cdot \text{sign}(V) \left| \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial z} \right| \right) = 0. \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{K} + \left(1 - \nu^2 \right) \frac{2R}{Ee} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} = 2\nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z \partial t} = 0, \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial t \partial z} = -\frac{\nu R}{Ee} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z}. \quad (4.52)$$

Виключити невідомі величини найзручніше починаючи з найпростіших рівнянь системи. Почнемо з виключення поздовжнього напруження. З (4.51)-(4.52) отримуємо:

$$\rho_t \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} - \frac{\nu R}{Ee} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} \right). \quad (4.53)$$

З рівняння (4.53) виражаємо:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} = \frac{Ee}{\nu R} \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} - \frac{\rho_t}{E} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right). \quad (4.54)$$

Підставимо вираз для тиску з формули (4.54) до рівнянь (4.49 і (4.50):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial z} + V \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial z} + \frac{Ee}{\rho_f \nu R} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\rho_t}{E} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) + \frac{\lambda}{2R} \text{sign}(V) V \frac{\partial V}{\partial t} + \\ + k \frac{D}{L} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + c \cdot \text{sign}(V) \left| \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right| \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \frac{Ee}{\nu R} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\rho_t}{E} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) = 2\nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (4.56)$$

Систему рівнянь (4.55)-(4.56) вже можна розв'язувати, задаючи для кожної з функцій швидкості, U і V , по дві пари умов: дві початкові умови (для швидкості та прискорення) та дві граничні умови (для значень швидкості у двох точках). Оскільки, з допомогою рівняння (4.55), система рівнянь (4.55)-(4.56) загалом є нелінійною, то стандартний спосіб її розв'язання – чисельний. Важливо, що незалежно від методу розв'язання, нам необхідно знати початкові умови:

$$V(t=0) = \varphi_1(z); \quad \partial V / \partial t(t=0) = \varphi_2(z); \quad (4.57)$$

$$U(t=0) = \psi_1(z); \quad \partial U / \partial t(t=0) = \psi_2(z). \quad (4.58)$$

Щоб визначити, який виляд можуть мати функції $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, перейдемо від фізичних змінних (z, t) до автотомельної змінної η :

$$\eta(t, z) = z - c_f t \quad (4.59)$$

Система рівнянь (4.55)-(4.56) в автомобельних величинах виглядає так:

$$c_f^2 \frac{d^2 V}{d\eta^2} - c_f \left(\frac{dV}{d\eta} \right)^2 - c_f V \frac{d^2 V}{d\eta^2} + \frac{Ee}{\rho_f \nu R} \left(\frac{d^2 U}{d\eta^2} \right) \left(1 - \frac{c_f^2 \rho_t}{E} \right) -$$

$$- \frac{\lambda c_f}{2R} \text{sign}(V) V \frac{dV}{d\eta} + k \frac{D}{L} \left(c_f^2 \frac{d^2 V}{d\eta^2} + c_f \cdot \text{sign}(V) c_f^2 \left| \frac{d^2 V}{d\eta^2} \right| \right) = 0. \quad (4.60)$$

$$\frac{d^2 V}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{K} + (1 - \nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \frac{Ee}{\nu R} \left(\frac{d^2 U}{d\eta^2} \right) \left(1 - \frac{\rho_t c_f^2}{E} \right) = 2\nu \frac{d^2 U}{d\eta^2} \quad (4.61)$$

Оскільки швидкість руху частинок твердого тіла U скрізь представлена лінійним чином, зручно виключити саме її із системи (4.60) - (4.61). З рівняння (4.61) виходить:

$$\left[2\nu - \left(\frac{1}{K} + (1 - \nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \frac{Ee}{\nu R} \left(1 - \frac{\rho_t c_f^2}{E} \right) \right] \frac{d^2 U}{d\eta^2} = \frac{d^2 V}{d\eta^2} \quad (4.62)$$

Позначемо

$$C^* = \left[2\nu - \left(\frac{1}{K} + (1 - \nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \frac{Ee}{\nu R} \left(1 - \frac{\rho_t c_f^2}{E} \right) \right]^{-1}.$$

Тоді рівняння (4.62) спроститься до такого виду:

$$\frac{d^2 U}{d\eta^2} = C^* \frac{d^2 V}{d\eta^2} \quad (4.63)$$

Підставивши рівняння (4.63) до рівняння (4.60), одержуємо:

$$c_f^2 \frac{d^2 V}{d\eta^2} - c_f \left(\frac{dV}{d\eta} \right)^2 - c_f V \frac{d^2 V}{d\eta^2} + \frac{Ee}{\rho_f \nu R} C^* \left(\frac{d^2 V}{d\eta^2} \right) \left(1 - \frac{c_f^2 \rho_t}{E} \right) -$$

$$- \frac{\lambda c_f}{2R} \text{sign}(V) V \frac{dV}{d\eta} + kD \left(c_f^2 \frac{d^2 V}{d\eta^2} + c \cdot \text{sign}(V) c_f^2 \left| \frac{d^2 V}{d\eta^2} \right| \right) = 0. \quad (4.64)$$

Якщо зібрати однорідні доданки, то рівняння (4.64) набуває такого вигляду

$$(B_0 + B_1 V) \frac{d^2 V}{d\eta^2} + B_2 V \frac{dV}{d\eta} + B_3 \left(\frac{dV}{d\eta} \right)^2 = 0. \quad (4.65)$$

У рівнянні (4.65) використані такі позначення:

$$B_0 = c_f^2 + \frac{Ee}{\rho_f \nu R} C^* \left(1 - \frac{c_f^2 \rho_t}{E} \right) + kD \left(c_f^2 \frac{d^2 V}{d\eta^2} + c \cdot c_f^2 \cdot \text{sign} \left(\frac{d^2 V}{d\eta^2} \right) \right)$$

$$B_1 = -C_f, B_2 = -\frac{\lambda c_f}{2R} \text{sign}(V), B_3 = B_1 = -c_f \quad (4.66)$$

Розв'язками рівняння (4.65) є стала швидкість (перший розв'язок) та

$$\int_0^{V(\eta)} \frac{1}{(B_1 \xi + B_0)^{-B_2/B_1} C_1 + \frac{B_3(-B_2 \xi + B_0)}{(B_1 + B_2) B_2}} d\xi - \eta - C_2 = 0 \quad (4.67)$$

Порівняння розв'язків задачі, отриманих стандартним та нестандартним методами.

Ще раз згадаємо Рімана, який вказував на можливість існування різних розв'язків у задачі про гідравлічний удар [101]. Так, якщо відразу ж застосувати до безрозмірних величин і використовувати безрозмірну автотомельну змінну у вигляді (4.23), то отримаємо систему рівнянь (4.24) - (4.27) [86]. Ця система, з рештою, зводиться до одного нелінійного диференціального рівняння першого порядку (4.33) з аналітичним розв'язком (4.34). Як бачимо, нестандартний метод не призводить до підвищення порядку диференціального рівняння,

еквівалентного вихідній системі диференціальних рівнянь. Замість очікуваного рівняння четвертого порядку, еквівалентного вихідної системі, виходить лише перший порядок, і навіть не другий – як у стандартному методу (див. рівняння (4.65)). Втішно також і те, що сучасний рівень розвитку теорії розв'язання диференціальних рівнянь вже може знайти аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння першого порядку.

Інші шукані величини завдяки застосованому нестандартному методу знаходяться просто [86] (також формули (4.35)):

Якщо ж шукати розв'язи для функцій $\bar{U}, \bar{p}, \bar{\sigma}_z$, використовуючи стандартний метод, то отримаємо, що ці функції визначаються з точністю до лінійної функції, наприклад:

$$\bar{U} = \frac{1}{C^*} (\bar{V} + C_1 \bar{\eta} + C_2) \quad (4.68)$$

Рівняння (4.35) дають всі підстави стверджувати, що і дві невідомі функції (тиск і поздовжнє напруження), що залишилися, також визначаються у вигляді, подібному (4.68).

Відзначимо переваги та недоліки обох підходів.

1) Нестандартний підхід дозволяє простіше отримати аналітичний розв'язок у вигляді спеціальної функції, в той час як стандартний підхід дає можливість отримати аналітичний розв'язок лише у квадратурах (інтеграл).

2) Отриманий стандартним методом, автотомельний розв'язок містить не одну, як за нестандартним методом, а дві константи інтегрування, що дозволяє точніше задавати вид початкових розподілів усіх функцій.

3) Отриманий нестандартним методом, розв'язок (30) є єдиним у той час як стандартний метод, за рахунок додаткового диференціювання, набуває додаткового розв'язку. Питання, наскільки цей розв'язок (стала швидкість поширення) фізичний?

Незважаючи на переваги розв'язку (4.34), він також має свої недоліки: складний аналітичний характер призводить до обмежень і стандартні пакети

програм, такі як Матлаб, вказують на це. Виходом з такої складної ситуації є можливість використання асимптотичного представлення функції $LambertW$. Це представлення має вигляд (див. Вікіпедію)

$$LambertW(\bar{\eta}) \approx \bar{\eta} - \bar{\eta}^2 + \frac{3}{2}\bar{\eta}^3 - \frac{8}{3}\bar{\eta}^4 + \frac{125}{24}\bar{\eta}^5 \quad (4.69)$$

Зрозуміло, що асимптотичне розвинення справедливе не для всіх значень аргументу. Для даних, що використовуються для розрахунків, це значення дорівнює 0.5. Однак, як показує графік на рис. 4.1 і для більш великих значень функція швидко зменшується, а не спрямовується до нескінченності. Оскільки обмеження значення аргументу для використання (4.69) записано в абсолютних значеннях, то, для позитивних значень аргументу, більших за 0.5, можна також користуватися асимптотикою. Це підтверджує порівняння графіків відповідних кривих, отриманих за різними методами.

Оскільки у роботі [86] дані наведені у безрозмірному вигляді, то зручно отримати аналог рівняння (4.65) у безрозмірному вигляді. Для цього використовуємо рівняння (4.55)-(4.56) і далі зробимо процедуру отримання безрозмірних рівнянь. Масштаби всіх величин запишемо так:

$$z = [z] \cdot \bar{z} = L \cdot \bar{z}, \quad t = [t] \cdot \bar{t} = \left(L / c_f \right) \cdot \bar{t}, \quad V = [V] \cdot \bar{V} = c_f \bar{V}, \quad U = [U] \cdot \bar{U} = c_t \bar{U}. \quad (4.70)$$

Підстановка (4.70) в рівняння (4.55) і (4.56), з урахуванням (4.26), дозволяє отримати такі співвідношення:

$$\begin{aligned} & \frac{c_f^3}{[z]^2} \frac{d^2 \bar{V}}{d \bar{\eta}^2} - \frac{c_f^3}{[z]^2} \left(\frac{d \bar{V}}{d \bar{\eta}} \right)^2 - \frac{c_f^3}{[z]^2} \bar{V} \frac{d^2 \bar{V}}{d \bar{\eta}^2} + \frac{Ee}{\rho_f \nu R} \left(\frac{c_t}{[z]^2} - \frac{\rho_t}{E} \frac{c_f^2 c_t}{[z]^2} \right) \frac{d^2 \bar{U}}{d \bar{\eta}^2} - \\ & - \frac{\lambda}{2R} \text{sign}(\bar{V}) \frac{c_f^3}{[z]^2} \bar{V} \frac{d \bar{V}}{d \bar{\eta}} + kD \left(\frac{c_f^3}{[z]^2} \frac{d^2 \bar{V}}{d \bar{\eta}^2} + c_f \cdot \text{sign}(V) \frac{c_f^2}{[z]^2} \left| \frac{d^2 \bar{V}}{d \bar{\eta}^2} \right| \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\frac{c_f}{[z]^2} \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} + \left(\frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \frac{Ee}{\nu R} \left(\frac{c_t}{[z]^2} - \frac{\rho_t c_f^2}{E [z]^2} \right) \frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{\eta}^2} = 2\nu \frac{c_t}{[z]^2} \frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{\eta}^2} \quad (4.72)$$

З рівняння (4.72) одержуємо:

$$\frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} = \frac{c_t}{c_f} \left[2\nu - \left(\frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \frac{Ee}{\nu R} \left(1 - \frac{\rho_t c_f^2}{E} \right) \right] \frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{\eta}^2}.$$

Або у більш компактному вигляді, подібному (4.63)

$$\frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{\eta}^2} = \bar{C}^* \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} \quad (4.73)$$

Тепер у рівнянні (4.73)

$$\bar{C}^* = \left[\frac{c_t}{c_f} \left(2\nu - \left(\frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \frac{Ee}{\nu R} \left(1 - \frac{\rho_t c_f^2}{E} \right) \right) \right]^{-1}.$$

Безрозмірний аналог рівняння (4.50) виходить, якщо розділити все рівняння (4.71) на множник при першому доданку в лівій частині:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} - \left(\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} \right)^2 - \bar{V} \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} + \frac{Ee}{\rho_f \nu R} \left(\frac{c_t}{c_f} \left(1 - \frac{c_f^2 \rho_t}{E} \right) \right) \left(\frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{\eta}^2} \right) - \\ - \frac{\lambda L}{2R} \text{sign}(\bar{V}) \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \frac{kD}{L} \left(\frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} + \text{sign}(\bar{V}) \left| \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} \right| \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Безрозмірні аналоги рівняння (4.64) і співвідношень (4.65) набувають такого вигляду:

$$(B_0 + B_1 \bar{V}) \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} + B_2 \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + B_3 \left(\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} \right)^2 = 0. \quad (4.75)$$

$$B_0 = 1 + \frac{E}{\rho_f c_f^2} \frac{e}{R} \frac{\bar{C}^*}{\nu} \left(\frac{c_t}{c_f} \left(1 - \frac{c_f^2 \rho_t}{E} \right) \right) + k \frac{D}{L} \left(\frac{d^2 V}{d\eta^2} + SW1 \left(\bar{V}, \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} \right) \right)$$

$$B_1 = -1, B_2 = -\frac{\lambda L}{2R} \text{sign}(\bar{V}), B_3 = B_1 = -1. \quad (4.76)$$

$$SW1 = \begin{cases} \text{sign}(\bar{V}) \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} > 0; \text{ при } \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} > 0 \\ -\text{sign}(\bar{V}) \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} < 0, \text{ при } \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} < 0. \end{cases}$$

Порівняння результатів обчислень, отриманих за стандартним та нестандартним методами.

Перш ніж перейти до порівняння результатів, розглянемо окремі випадки загального рівняння та їх вирішення.

Почнемо з нехтування конвективним прискоренням. У цьому випадку рівняння (4.75) спрощується до

$$B_0 \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} + B_2 \bar{V} \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} = 0. \quad (4.77)$$

Загальний розв'язок рівняння (4.77) має такий вигляд:

$$\bar{V}(\bar{\eta}) = \tanh \left(\sqrt{C_1 B_0 B_2} (C_2 + \bar{\eta}) \sqrt{2} / (2B_0) \right) \cdot \sqrt{C_1 B_0 B_2} \sqrt{2} / B_2 \quad (4.78)$$

Константи інтегрування у розв'язку (4.78) знаходяться з граничних умов

$$\bar{V}(\bar{\eta} = 0) = 1, \quad \bar{V}(\bar{\eta} = 1) = 0. \quad (4.79)$$

Розв'язок (4.78) з урахуванням граничних умов (4.79) має такий вигляд:

$$\bar{V}(\bar{\eta}) = \tanh \left(\sqrt{C_1 B_0 B_2} (\bar{\eta} - 1) \sqrt{2} / (2B_0) \right) \cdot \sqrt{C_1 B_0 B_2} \sqrt{2} / B_2 \quad (4.80)$$

Константа C_1 визначається чисельно на підставі розв'язку наступного рівняння:

$$1 = \tanh\left(\sqrt{C_1 B_0 B_2} (-1) \sqrt{2} / (2B_0)\right) \cdot \sqrt{C_1 B_0 B_2} \sqrt{2} / B_2$$

Другий частинний випадок рівняння (4.75) виходить, якщо знехтувати стаціонарною в'язкістю. У цьому випадку розв'язок рівняння (4.75) спрощується до такого:

$$(B_0 + B_1 \bar{V}) \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\eta}^2} + B_3 \left(\frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} \right)^2 = 0. \quad (4.81)$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$\bar{V}(\bar{\eta}) = -\frac{1}{B_1} \left(B_0 - \left[(B_1 + B_3)(C_1 \bar{\eta} + C_2) \right] \frac{B_1 + 2B_3}{B_1 + B_3} \right) = \left(B_0 - \left[-2(C_1 \bar{\eta} + C_2) \right]^{\frac{3}{2}} \right) \quad (4.82)$$

Константи інтегрування (4.82) беруться із загального розв'язку, що враховує всі ефекти (конвекцію, стаціонарне і нестаціонарне тертя). Якщо ж намагатися задовольнити (4.82) граничним умовам (4.79), то виявиться, що для цього необхідно, щоб

$$B_0 \geq 1. \quad (4.83)$$

Для обраних даних умова (4.83) і не виконується. Цей факт, по суті, є неявним натяком на те, що, загалом кажучи, нехтувати стаціонарною в'язкістю, але враховувати конвективне прискорення, не можна. Після того, як було чисельно розв'язано крайову задачу (4.75), (4.79), стало очевидно, що замість суворого задоволення першої умови (4.79) розумно замінити її на

$$\bar{V}(\bar{\eta} = 0) = B_0. \quad (4.84)$$

Тоді друга гранична умова (4.79) дасть:

$$C_1 = -B_0^{2/3}/2.$$

А розв'язок (4.75) тепер матиме такий вигляд:

$$\bar{V}(\bar{\eta}) = B_0 \left(1 - \bar{\eta}^{\frac{3}{2}} \right) \quad (4.85)$$

На рис. 4.3 представлений авто модельний розв'язок для повної моделі, що враховує конвективне прискорення, стаціонарне та нестаціонарне тертя рідини о стінки труби. Розв'язок, отриманий стандартним методом, спадає набагато швидше, ніж його аналог, отриманий за нестандартним методом. Цікавішим і змістовним є порівняння розв'язків, отриманих ігноруванням стаціонарного тертя. На рис. 4.4 представлені два графіки. Пряма лінія відповідає нестандартному підходу і вказує на сталу швидкість поширення ударного імпульсу, тоді як за стандартним підходом швидкість змінюється у просторі. Обидва підходи дають в результаті менше одиниці максимальне значення для безрозмірної швидкості. Зрозуміло, що за відсутності в'язкої дисипації ударний імпульс може поширюватися зі сталою швидкістю, що більше відповідає фізиці ніж його просторова мінливість. Відсутність урахування конвекції з нестандартного підходу спрощує рівняння (4.55)

$$B_0 \frac{d^2 V}{d\eta^2} + B_3 \left(\frac{dV}{d\eta} \right)^2 = 0. \quad (4.86)$$

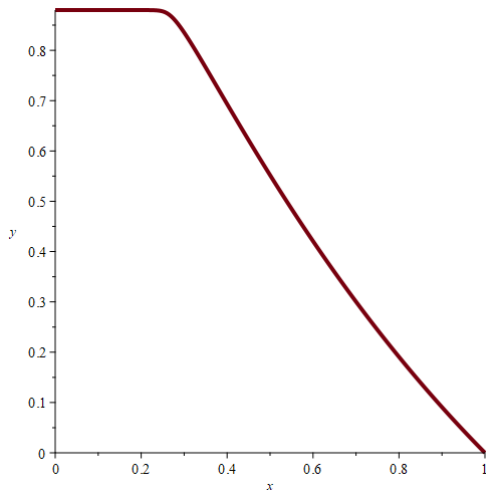
Загальний розв'язок (4.86) має вигляд

$$\bar{V}(\bar{\eta}) = \frac{B_0}{B_3} \ln \left(\frac{B_3}{B_0} (C_1 \bar{\eta} + C_2) \right). \quad (4.87)$$

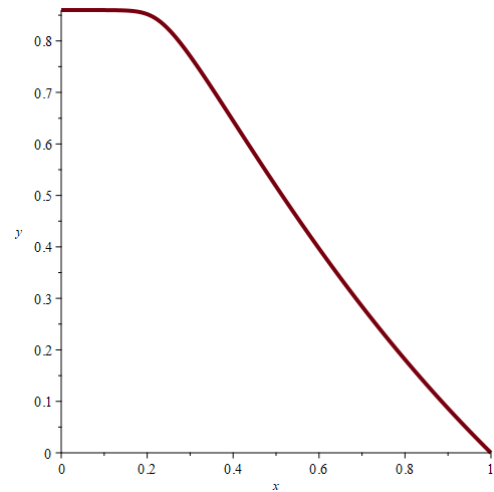
Константи інтегрування (4.87) знаходять із граничних умов (4.79). В результаті виходить такий розв'язок:

$$\bar{V}(\bar{\eta}) = \frac{B_0}{B_3} \ln \left(\left(1 - e^{B_3/B_0} \right) \bar{\eta} + e^{B_3/B_0} \right). \quad (4.88)$$

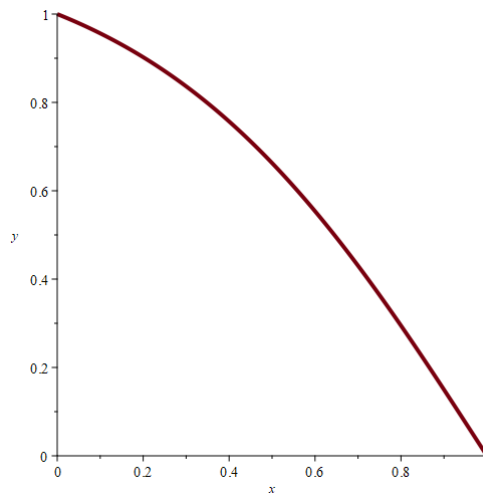
На рис. 4.5. наведено результати обчислень: чисельного розв'язання рівняння (4.65) та за формулою (4.88).



а)



б)



в)

Рис. 4.5. Результати обчислення швидкості поширення імпульсу: $B_0 = 0.8959$, $B_1 = -1$, $B_3 = -1$; а) -- $B_2 = -2$, $\bar{V}(0) = 0.88$; та б) $B_2 = -2.5$, $\bar{V}(0) = 0.86$. в) $B_1 = -0$, $B_3 = -0$, $B_2 = -2.5$, $\bar{V}(0) = 1$ за формулою і (4.88) .

Розділ 4.6. Особливості формування ударного імпульсу у бульбашковій рідині з урахуванням взаємодії нестационарної течії зі структурою.

Мета даного розділу – отримати математичну модель зародження (формування) ударного імпульсу в бульбашковій рідині, яка знаходиться в тонкостійній оболонці з урахуванням взаємодії рідини зі структурою (оболонкою). Порівняти отримані результати з:

- моделлю бульбашкової рідини, де взаємодія зі структурою не враховується;
- моделлю однофазної рідини, де враховується взаємодія зі структурою.

Для досягнення поставленої мети використаємо систему рівнянь для нестационарної течії бульбашкової рідини та систему рівнянь для урахування взаємодії однорідної рідини зі структурою.

Почнемо розв'язання задачі з наведення рівнянь бульбашкової рідини (див. (6.2.1) в [93]). Із рівнянь дещо в іншому вигляді ніж (3.52)-(3.54) рівняння (3.53) препишемо в такому (оригінальному) вигляді:

$$\alpha_1 \left(\frac{\partial \rho_1^0}{\partial t} + V \frac{\partial \rho_1^0}{\partial x} + \rho_1^0 \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{3\alpha_2 w_{1a}}{a} \rho_1^0. \quad (4.89)$$

Рівняння моделі бульбашкової рідини, згідно із (3.52), (3.54), (4.89), приймають такий вигляд:

$$\left(\rho_{10}^0 + \frac{p'}{c_f^2} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (4.90)$$

$$\frac{\alpha_1}{c_f^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + V \frac{\partial p'}{\partial z} \right) + \left(\rho_{10}^0 + \frac{p'}{c_f^2} \right) \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{3\alpha_2 w_{1a}}{a} \left(\rho_{10}^0 + \frac{p'}{c_f^2} \right). \quad (4.91)$$

Розширюємо можель взаємодії нестационарної течії рідини, поєднуючи рівняння (4.14) та (4.90). Маємо:

$$\left(\rho_{10}^0 + \frac{p'}{c_f^2} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\lambda}{4R} V |V| + kD \left(\frac{\partial V}{\partial t} + c \cdot \text{sign}(V) \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| \right) = 0. \quad (4.92)$$

Далі, рівняння (1.19) переписуємо у вигляді

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{1}{K} + (1 - \nu^2) \frac{2R}{Ee} \right)^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - 2\nu \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0$$

і поєднуємо із (4.91), додаючи конвекцію тиску та бульбашковість рідини:

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \left[\left(\frac{1}{K} + (1 - \nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho_1^0 c_f^2} \right] \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + V \frac{\partial p'}{\partial z} \right) = 2\nu \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{3\alpha_2 w_{1a}}{a}. \quad (4.93)$$

Система рівнянь (4.92), (4.93), (1.20), (1.21) являє собою шукану, яка описує взаємодію нестационарної течії бульбашкової рідини зі структурою. Отже, ми використали зв'язок швидкості поширення ударного імпульсу в бульбашковій рідині і підставили цей вираз (для повздовжньої похідної від швидкості в рідині) в рівняння збереження маси в задачі про взаємодію течії зі структурою.

Наступні кроки нічим не відрізняються від задачі про взаємодію нестационарної течії (ударного імпульсу) зі структурою (див. розділ 4. 1.). Зробимо ці кроки спочатку із розмірними рівняннями, а потім вже перейдемо до безрозмірних аналогів. Це допоможе нам уникнути механічних помилок, які завжди з'являються при виводі, а також легше буде робити фізичний аналіз, маючи в арсеналі не тільки безрозмірні, але і розмірні рівняння.

Перехід до автотомельної змінної.

Як і раніше, тобто в розділі 4.1, будемо робити прив'язку до поширення ударного імпульсу в рідині. Автотомельну змінну задамо виразом (4.59). Але тепер в (4.59) c_f вже відповідає швидкості поширення ударного імпульсу в бульбашковій рідині. Подібно тому, як це було раніше, отримуємо:

$$\alpha_1 \left(\rho_{10}^0 + \frac{p'}{c_f^2} \right) \left(-c_f \frac{dV}{d\eta} + V \frac{dV}{d\eta} \right) + \frac{dp}{\partial \eta} + \frac{\lambda}{4R} V |V| + kD \left(-c_f \frac{dV}{d\eta} + c_f \cdot \text{sign}(V) \left| \frac{dV}{d\eta} \right| \right) = 0. \quad (4.94)$$

Рівняння (4.93) перетворюється на

$$\frac{dV}{d\eta} + \left[\left(\frac{1}{K} + (1 - \nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho_1^0 c_f^2} \right] \left(-c_f \frac{dp'}{d\eta} + V \frac{dp'}{d\eta} \right) = 2\nu \frac{dU}{d\eta} + \frac{3\alpha_2 w_{1a}}{a}. \quad (4.95)$$

Перехід від розмірних величин до безрозмірних.

Безрозмірними аналогами рівнянь (4.94)-(4.95) будуть такі два рівняння

$$\left[\alpha_1 (1 + \bar{p}') (\bar{V} - 1) + Br (SW - 1) \right] \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + \frac{d\bar{p}'}{d\bar{\eta}} = -DW \bar{V} |\bar{V}|, \quad (4.96)$$

$$(1 + \bar{p}') \frac{d\bar{V}}{d\bar{\eta}} + (1 + \bar{p}') Nu_2 \frac{d\bar{U}}{d\bar{\eta}} + (Nu_1 (1 + \bar{p}') + \alpha_1) (\bar{V} - 1) \frac{d\bar{p}'}{d\bar{\eta}} = (1 + \bar{p}') Bb. \quad (4.97)$$

Матриця системи рівнянь (4.4), (4.5), (4.96), (4.97) відносно похідних шуканих функцій ($dV/d\eta, dU/d\eta, dp'/d\eta, d\sigma_z/d\eta$ -- в наведеному порядку) за автомодельною координатою така:

$$\begin{pmatrix} (1 + \bar{p}') (\bar{V} - 1) + Br (SW - 1) & 0 & 1 & 0 \\ (1 + \bar{p}') & -(1 + \bar{p}') Nu_2 & [Nu_1 (1 + \bar{p}') + \alpha_1] (\bar{V} - 1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -Nu_4 & Nu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -DW \bar{V} |\bar{V}| \\ Bb (1 + \bar{p}') \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

Знову зазначимо, що система рівнянь є нелінійною і не просто нелінійною, але такою, що має третій порядок нелінійності. Використаємо

представлення в матричному вигляді і знайдемо визначник матриці та відповідні визначники, які потрібні для розв'язання системи рівнянь відносно зазначених вище похідних.

$$\Delta = \alpha_1 (1 + \bar{p}') (\bar{V} - 1) + \text{Br}(\text{SW} - 1) \begin{vmatrix} -(1 + \bar{p}') \text{Nu}_2 & (\text{Nu}_1 (1 + \bar{p}') + \alpha_1) (\bar{V} - 1) & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\text{Nu}_4 & \text{Nu}_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} (1 + \bar{p}') & -(1 + \bar{p}') \text{Nu}_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \text{Nu}_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\alpha_1 (1 + \bar{p}') (\bar{V} - 1) + \text{Br}(\text{SW} - 1)] \left[-(1 + \bar{p}') \text{Nu}_2 \text{Nu}_4 - ((\text{Nu}_1 (1 + \bar{p}') + \alpha_1) (\bar{V} - 1)) (\text{Nu}_3 - 1) \right]$$

$$+ (1 + \bar{p}') (\text{Nu}_3 - 1).$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -DW|\bar{V}|\bar{V} & 0 & 1 & 0 \\ (1 + \bar{p}') \text{Bb} & -(1 + \bar{p}') \text{Nu}_2 & (\text{Nu}_4 (1 + \bar{p}') + \alpha_1) (\bar{V} - 1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\text{Nu}_4 & \text{Nu}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -DW|\bar{V}|\bar{V} \left[-(1 + \bar{p}') \text{Nu}_2 \text{Nu}_4 - ((\text{Nu}_1 (1 + \bar{p}') + \alpha_1) (\bar{V} - 1)) (\text{Nu}_3 - 1) \right]$$

$$+ (1 + \bar{p}') \text{Bb} (\text{Nu}_3 - 1).$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 (1 + \bar{p}') (\bar{V} - 1) + \text{Br}(\text{SW} - 1) & -DW|\bar{V}|\bar{V} & 1 & 0 \\ (1 + \bar{p}') & (1 + \bar{p}') \text{Bb} & (\text{Nu}_4 (1 + \bar{p}') + \alpha_1) (\bar{V} - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -\text{Nu}_4 & \text{Nu}_3 \end{vmatrix}$$

$$= Nu_4 (1 + \bar{p}') \left[Bb \left(\alpha_1 (1 + \bar{p}') (\bar{V} - 1) + Br (SW - 1) \right) + DW |\bar{V}| \bar{V} \right].$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 (1 + \bar{p}') (\bar{V} - 1) + Br (SW - 1) & 0 & -DW |\bar{V}| \bar{V} & 0 \\ (1 + \bar{p}') & -(1 + \bar{p}') Nu_2 & (1 + \bar{p}') Bb & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & Nu_3 \end{vmatrix}$$

$$= -Nu_3 (1 + \bar{p}') \left[Bb \left(\alpha_1 (1 + \bar{p}') (\bar{V} - 1) + Br (SW - 1) \right) + DW |\bar{V}| \bar{V} \right].$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \alpha_1 (1 + \bar{p}') (\bar{V} - 1) + Br (SW - 1) & 0 & 1 & -DW |\bar{V}| \bar{V} \\ (1 + \bar{p}') & -(1 + \bar{p}') Nu_2 & (Nu_1 (1 + \bar{p}') + \alpha_1) (\bar{V} - 1) & (1 + \bar{p}') Bb \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -Nu_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -Nu_4 (1 + \bar{p}') \left[Bb \left(\alpha_1 (1 + \bar{p}') (\bar{V} - 1) + Br (SW - 1) \right) + DW |\bar{V}| \bar{V} \right].$$

Зважаючи на складний характер рівнянь, зупинимося лише на розв'язанні автономного рівняння – залежності тиску від швидкості руху рідини:

$$\frac{d\bar{p}'}{d\bar{V}} = \frac{(Nu_3 - 1)(1 + \bar{p}') \left[DW \bar{V} |\bar{V}| + Bb \left\{ \alpha_1 (1 + \bar{p}') (\bar{V} - 1) + Br (SW - 1) \right\} \right]}{DW \bar{V} |\bar{V}| \left[-(1 + \bar{p}') Nu_2 Nu_4 - ((1 + \bar{p}') Nu_1 + \alpha_1) (\bar{V} - 1) (Nu_3 - 1) \right] + Bb (Nu_3 - 1)(1 + \bar{p}')} \quad (4.99)$$

Нажаль, повне рівняння (4.99) ще не відоме людству як аналітично розв'язувати. Тому його розв'язок буде лише чисельним.

На рис. 4.6 представлено залежність $\bar{p}' = \bar{p}'(\bar{V})$ поля збурень тиску від швидкості поширення ударного імпульсу (хвилі) за такої граничної умови:

Якщо порівняти цю залежність із відповідною залежністю для нестационарної течії бульбашкової рідини (див.3.4), то стане зрозумілим: зі збільшенням швидкості тиск так само прямує до нуля, а от при значеннях швидкості менших за швидкість звуку в рідині, тиск може зростати дуже сильно. Таку фізичну закономірність було виявлено давно [93]. З іншого боку, характер представленої на рис. 4.6 кривої схожий на рис. 6.2.4 із [93], що свідчить про фізичність цієї кривої.

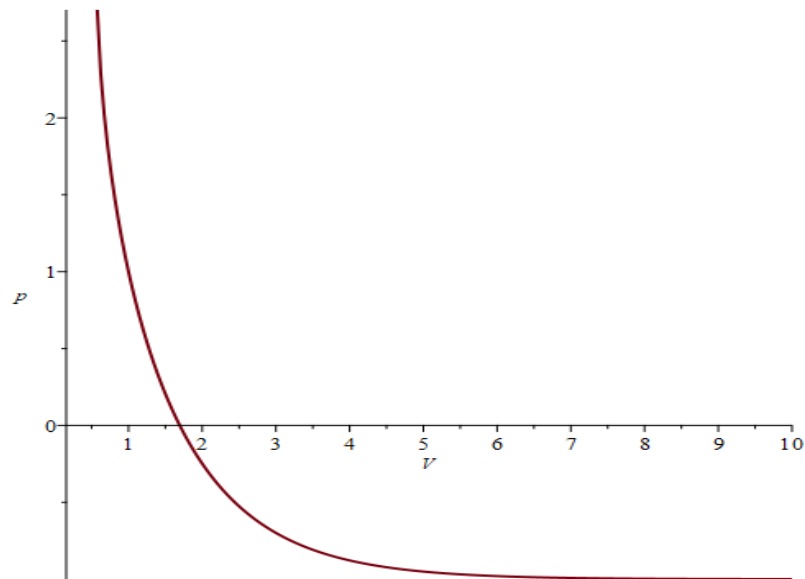


Рис. 4.6. Залежність тиску від швидкості поширення ударної хвилі

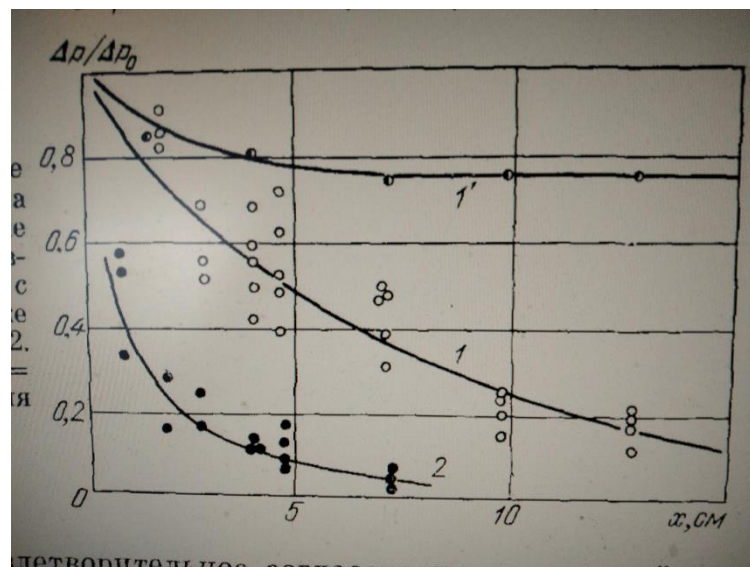
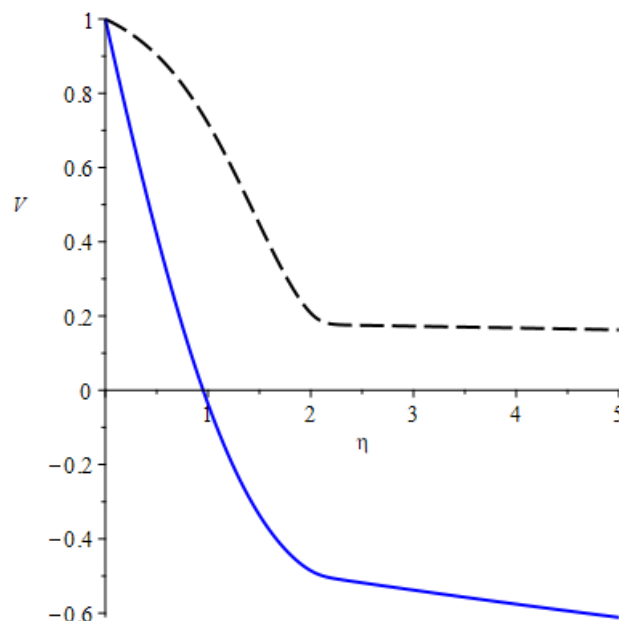


Рис. 4.7. Залежність тиску від координати: експеримент і теорія [93].

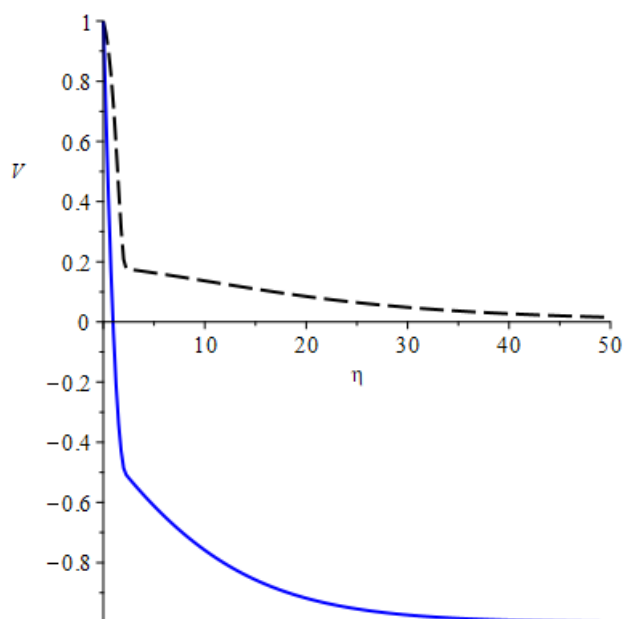
Набагато цікавішим є залежності швидкості поширення ударного імпульсу та збурення тиску від автомодельної змінної. Аналіз чисельних розрахунків показав, що лише цілком логічні фізичні умови

$$\bar{V}(\bar{\eta} = 0) = 1, \quad \bar{p}'(\bar{\eta} = 0) = 1$$

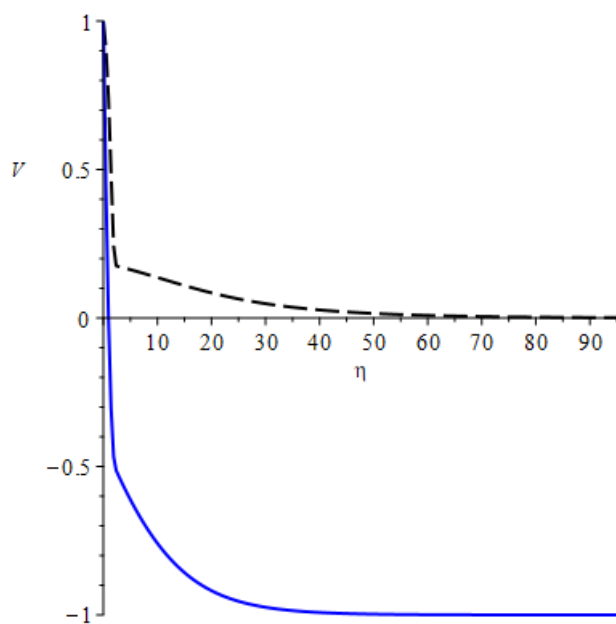
відповідають представленим на рис. 4.8. закономірностям. Інші граничні умови відповідають нефізичним розподілам. Пояснення, чому саме перед фронтом ударного імпульсу утворюється досить протяжна зона із ненульовою швидкістю можна отримати, якщо пригадати, що тепер і стінки структури чинять вплив на рідину. Оскільки швидкість поширення звуку в металах значно більша ніж у рідині, то обернений вплив деформації структури генерує рух рідини. Цей рух, вірогідно, обумовлений стисливістю розчинених у рідині газів. Тому і не дивно, що швидкість поширення руху у широкій зоні у кілька разів менша за максимальну, що відповідає швидкості звуку в рідині. Це пояснюється тим, що у газах швидкість звуку у кілька разів менша ніж у рідинах.



a)



б)



в)

Рис. 4.8. Поширення ударного імпульсу швидкості (пунктир) та тиску (суцільна) для різних розмірів області.

Висновки до розділу

У даному розділі розглянута задача взаємодії нестационарної течії (ударного імпульсу) рідини із структурою (трубою). Отримано аналітичний розв'язок цієї задачі. Новизною є одночасне врахування трьох чинників: конвекції поля швидкості в рідині, стаціонарного та нестационарного тертя рідини о тверду поверхню. Якщо конвекцію не враховувати, то збурення усіх полів поширюються зі сталими швидкостями. Аналітичний розв'язок задачі за нехтуванням і конвекції і тертя збігається з вже відомим, але спосіб його отримання простіший. Врахування в моделі, і відповідно у розв'язку задачі, тертя призводить до відмінної від сталого значення функціональної залежності швидкості поширення ударного імпульсу, а також інших характеристик, які є лінійними функціями швидкості в рідині. Спочатку (при $0 < \bar{\eta} < 0.5$) спостерігається приблизно лінійний закон спадання швидкості, що узгоджується із попередніми дослідженнями [13-14]. При наближенні $\bar{\eta} \rightarrow 1$ швидкість прямує до нуля за нелінійним законом. Вплив нестационарної складової тертя полягає в тому, що без врахування цієї складової отримуються більші значення швидкості. Крім того, зі збільшенням в'язкості відбувається концентрація області ударного імпульсу. У якості подальших досліджень можна використати отримані аналітичні розв'язки для чисельного моделювання процесів поширення, відбиття ударних хвиль у трубопроводах, та більш складних структурах.

Висновки

Дана дисертаційна робота присв'яена моделюванню фізичних процесів в системах керування авіаційної техніки. Як свідчить досвід, ще й сьогодні керування різними системами здійснюється не достатньо точно. В чому ж причина цих недоліків? Основні причини дві. Перша причина – нехтування фізичними явищами і, як результат, використання спрощених моделей, які не відповідають повною мірою (тобто не є адекватними) процесам, що відбуваються в робочих системах літаків і вертольотів. Друга причина – математична складність задач, які відповідають урахуванню всіх чинників, що впливають на той чи інший процес. Як результат – знову спрощення, тепер вже математичної задачі. Саме вказані дві причини суттєво впливають на відповідність математичної моделі фізичному процесу. Отже, у даній роботі здійснено ряд кроків щодо більш адекватного моделювання та розробці нових моделей фізичних процесів.

Серед основних результатів, які отримані в даній роботі, слід відзначити такі:

Отримали подальший розвиток моделі керування випуском та прибиранням шасі: здійснено урахування складних погодних умов – поривчастого вітру та швидкого обледеніння.

Показано (аналітично), що існуюча лінеаризація (спрощення) взаємного зв'язку між рухом штоку приводу та закрилками неприпустима для кутів повороту закрилок порядку пів радіану (30 градусів). Вдосконалено відповідну модель.

Вперше показано, на підставі отриманих аналітичних розв'язків, що рух штоку гідроциліндра відповідає одному з можливих типів нестационарної течії рідини (ударним імпульсом). Отже, зроблено дуже важливий висновок про необхідність вивчення процесу формування нестационарних течій в гідравлічних системах літаків і вертольотів.

Отримала подальший розвиток теорія гідравлічного удару у крапельній рідині. В новій моделі вже одночасно враховуються конвекція поля швидкості і тертя. Застосовано метод фазової площини для автономної системи і вперше отримане співвідношення «тиск – швидкість поширення ударного імпульсу».

Вперше розроблена суттєво нелінійна модель формування та поширення ударного імпульсу в бульбашковій рідині. Хоча основна ідея використання двохфазної (бульбашкової) рідини запозичена з монографії Нігматуліна, робоча модель не є спрощеною – лінеаризованою. Як і для однофазної рідини, отримане співвідношення між тиском і швидкістю поширення ударного імпульсу в бульбашковій рідині. Досліджено вплив вмісту бульбашок на характеристики течії.

Отримала подальший розвиток теорія взаємодії нестационарної течії рідини зі структурою. Тепер замість лінійної моделі використовується нелінійна, яка враховує додатково конвекцію, стаціонарне та нестационарне тертя рідини об поверхню твердого деформованого тіла -- всі три нелінійні механізми передачі кількості руху.

Вперше розроблено нелінійну модель взаємодії нестационарної течії бульбашкової рідини зі структурою. Нелінійність визначається зазначеними у попередньому висновку механізмами. Наявність бульбашок повітря значно поширює область нестационарної течії рідини: перед зосередженою областю ударного імпульсу має місце набагато ширша область руху рідини із швидкістю у кілька разів меншою за швидкість поширення звуку в рідині. Цей факт можна пояснити оберненим впливом пружної структури, яка передає імпульс рідині через стисливість бульбашок газу, бо саме швидкість звуку в газі у кілька разів менша за відповідну у рідині.

При розробці математичних моделей нестационарних течій скрізь використовувався підхід, суть якого -- перехід від диференціальних рівнянь у частинних похідних до автомобільних рівнянь, що значно математично спрощує розв'язання задач. Однак, з іншого боку, використання автомобільності обмежує застосування отриманих результатів періодом часу,

коли відбувається формування ударного імпульсу і перші моменти його поширення – до зіткнення із перешкодами.

Вперше отримано дуже важливий висновок щодо теорії розв’язання диференціальних рівнянь. Як з’ясувалося, для певного класу задач, де можна використовувати автотодельність, система диференціальних рівнянь не є еквівалентною одному диференціальному рівнянню більш високого порядку. Натомість, при використанні автотодельності, порядок диференціального рівняння не підвищується. В роботі порівняно класичний (загально прийнятий) та автотодельний підходи до розв’язання нелінійних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних. Нелінійна система диференціальних рівнянь у частинних похідних може мати, за різними підходами її розв’язання, різні розв’язки. Оскільки за класичним методом проводиться додаткове частинне диференціювання, то очевидно, що отримані у такий спосіб розв’язки поступаються автотодельним у сенсі відповідності фізичного опису процесу.

Література

1. Буренніков Ю.А., Немировський І.А., Козлов Л.Г. Гідравліка, гідро- та пневмоприводи: навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2013. 273 с.
2. Гідравліка та гідропневмоприводи. Підручник. / В.О. Федорець, М.Н. Педченко, В.Б. Струтинський, М.В. Новік, О.В. Єлісєєв. Київ : Вища школа, 1995. 463с.
3. Кавитация в жидкостных системах воздушных судов. / М. Глазков, В. Ланецкий, Н. Макаренко, И. Челюканов. Киев: КИИГА, 1987. 64 с.
4. Губарев О., Ганпанцурова О., Д'яконова Н., Космина А. Гідропривод з пружно-гідравлічним дозуванням рідини. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Гідравлічні машини та гідроагрегати*. 2018. №17(1293). С. 25—33.
5. Доценко В., Ковеза Ю., Лихошерст И. О создании адекватной динамической модели системы управления предкрылками и закрылками. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2015. № 3 (120). С. 10—15.
6. Доценко, В., Ковеза, Ю., Лихошерст, И. Упрощенная модель системы управления закрылками и предкрылками. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2015. №4(121). С. 5--9.
7. Занорин, С.М., Балабаев, Р.И. Математические модели рулевых приводов летательных аппаратов. *Известия ТРТУ, тематический выпуск. Раздел II. Прикладные задачи системного анализа*. 2006. С. 246—254.
8. Зезин В.Г. Динамика и регулирование гидропневмосистем: учебное пособие Челябинск: ЮУрГУ, 2011. 146 с.
9. Крашаница Ю.А., Жеряков Д.Ю. Аэродинамический профіль в трансзвуковом потоке газа. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2021. т. 2(170). С. 20—27. DOI: 10.32620/aktt.2021.2.03.
10. Ломакин, В., Шумилов, И., Щербаков, Т. Математическое моделирование электрогидравлического следящего привода высокоточного регулирования вращательного движения. *Известия высших учебных заведений*. 2011. №10. С. 38-45.

11. Лук'янов П.В, Бадах В.М., Бутько В.С., Павлова К.С. Рух поршня гідроциліндру під час гідроудару. *Промислова гідравліка і пневматика: матеріали XXII міжнародної наук.-техн. конф. АС ПГП, м. Київ, 17-18 листопада 2021 р. Київ, 2021. С. 48-50.*

12. Лук'янов П. В., Бадах В.М., Іванов М.С., Тарасенко Т.В. Математична модель прибирання та випуску шасі літака. *Промислова гідравліка і пневматика: матеріали XXI міжнародної наук.-техн. конф. АС ПГП, м. Київ, 30 листопада - 1 грудня 2020 р. Вінниця, 2020, С. 68-69.*

13. Лук'янов П.В, Бадах В.М., Павлова К.С., Рубанович А.Ю. Кінематика та динаміка випуску передньої шасі літака в складних погодних умовах. *Промислова гідравліка і пневматика: матеріали XXIII міжнародної наук.-техн. конф. АС ПГП, м. Київ, 15-16 грудня 2022 р. Київ, 2022. С. 36-38.*

14. Лук'янов П.В, Бадах В.М., Павлова К.С. Нелінійна модель системи первинного контролю політом «ЕМП-закрилки». *Гідромеханіка в інженерній практиці: матеріали XXVII міжнародної наук. техн. конф., м. Київ, 31 травня – 2 червня 2023 р., Київ, 2023. С. 66-68.*

15. Лук'янов П.В, Павлова К.С. Поширення ударної хвилі у бульбашковій рідині. *Сучасні технології у промисловому виробництві (СТПВ-2024): матеріали XI Всеукраїнської наук.-техн. конф., м. Суми, 23-26 квітня 2024 р. Суми, 2024. С. 303-304*

16. Лук'янов П.В., Павлова К.С. Нелінійна динаміка в системі первинного контролю польотом. *Механіка гіроскопічних систем. 2024. Випуск 47. с. 17-27.*

17. Лук'янов, П.В., Сивашенко, Т.І., Якименко, Б.М. Ударна хвиля у рідині, що знаходиться у пружній циліндричній оболонці нескінченної довжини. *Промислова гідравліка і пневматика. 2019. т. 2(64), с. 38—46.*

18. Павлова К.С. Урахування в моделі гідравлічного удару конвекції поля швидкості. *ПОЛІТ. СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ НАУКИ: тези доповідей XXIV Міжнародної науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених, м. Київ, 2—5 квітня 2024 р. Київ, 2024. С. 181-182.*

19. Павлова К.С. , Лук'янов П.В. Формування ударного імпульсу в системі бульбашкова рідина-структура. *Гідромеханіка в інженерній практиці: матеріали XXVIII міжнародної наук. техн. конф., м. Київ, 28 – 29 листопада 2024 р., Київ, 2024. С. 38-41.*
20. Піонткевіч О. Підвищення ефективності багаторежимного гідроприводу фронтального навантажувача. Київ: НТТУ «КПІ», 2019. 249 с.
21. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем: учеб. для вуз. по спец. «Гидропневмоавтоматика и гидропривод» и «Гидравлические машины и средства автоматизации» Москва. : Машиностроение, 1987. 464 с.
22. Рассказова Ю.Б. Математическая модель гидравлического привода вращательного движения с объемным регулированием. *Вісник Східноукраїнського Національного університету імені Володимира Даля.* 2016. № 2 (226). С. 70—75.
23. Садиков И., Петров И. Математическое моделирование электрогидравлического следящего привода. *Молодежный вестник УГАТУ.* 2019. №1(20). С. 148—153.
24. Сивашенко Т.И. динамические и прочностные характеристики гибких металлических и фторопластовых трубопроводов систем летательных аппаратов: дис. канд. техн. наук: /Киевский институт инженеров гражданской авиации. Киев, 1972. 181 с.
25. Складаревский А. К вопросу расчета динамических процессов в гидравлическом следящем приводе с длинными гидроканалами. *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Сер. Машиностроение.* 2014. №3 (202). С. 209—218.
26. Солоухин Р.И. Ударные волны и детонация в газах. М.: Физматлит, 1963. 176 с.
27. Тарасенко Т., Бадах В. Кавітаційне витікання рідини через дросельний пристрій. *Mechanics and Advanced Technologies.* 2017. 3 (81). С. 82 – 91.

28. Хорохордін А.О., Кравченко І.Ф., Мітрохович М.М., Балалаєва К.В., Балалаєв А.В. Методика раціонального формування поверхонь гальмування плоского надзвукового вхідного пристрою. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2023. т.4(190). С. 28—34. DOI: 10.32620/aktt.2023.4sup2.03.
29. Adamkowski A., Lewandowsky M., Lewandowsky S. Fatigue life analytical model of stress concentration in welded joints with angular distortions and considering the influence of water hammer damping. *Thin-Wall Structures*. 2021. v. 159. 107350. P. 1-12. DOI: 10.1016/j.tws.2020.107350.
30. Agarwal N., and Lawson C. A practical method to account for seal friction in aircraft hydraulic actuator preliminary design. *J. Aerospace Engineering*. 2016. vol. 231(5). P. 941-950.
31. Ali H., Al-Bakri F., Khafaji S. Analytical position control system of a linear hydraulic actuator used in aircraft applications. *International Journal of Mechatronics and Applied Mechanics*. 2023. Issue 13. P. 209—218.
32. Aliabadi H.K., Ahmadi A., Keramat A. Frequency response of water hammer with fluid-structure interaction in viscoelastic pipe. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2020. Vol. 144. P. 106848
33. Allievi L. Theoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione. *Ann. Soc. Ing. Arch. Italiana*. 1903.
34. Arriola D., Thielecke F. Design of Fault-Tolerant Control Functions for a Primary Flight Control System with Electromechanical Actuators. 2015. 978-1-4799-8190-8/15/\$31.00C2015IEEE. DOI: [10.1109/AUTEST.2015.7356523](https://doi.org/10.1109/AUTEST.2015.7356523)
35. Balaban E., Saxena A., Goebel K., Byington C., Watson M., Bharadwaj S., Smith M. Experimental data collection and modelling for Nominal and Fault Conditions on electro-Mechanical Actuators. *Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society*, 2009. 16 pages.
36. Belloli, D., Previdi, F., Savaresi, S., Cologni, A., Zappella, M. Modelling and Identification of an Electro-Hydrostatic Actuator. *5th IFAC Symposium on Mechatronic Systems*, Cambridge, MA, USA, Sept 13-15, Marriot Boston Cambridge 2010. P. 620-625.

37. Bergant A., Simpson A.R., Vitkovsky J. Developments in unsteady pipe flow friction modeling. *Journal of Hydraulic Research*. 2001. Vol. 39(3). P. 249-257. <http://www.tandfonline.co.uk/copyright/sharingYourWork.asp>
38. Borisov A.A., Gelfand B.E. and Timofeev E.I. Shock waves in liquids containing gas bubbles. *Int. J. Multiphase Flow*. 1983. Vol. 9. No 5. P. 531-543.
39. Brunone B. and Golia U.M. Some considerations on Velocity Profiles in Unsteady Pipe Flows. *Int. Conf. on Entropy and Energy Dissipation in Water Resources*. Maratea, Italy 1991. p. 481-487.
40. Budinger M., Liscouet J., Hospital F. and Mare J. Estimation models for the preliminary design of electromechanical actuators. *Proc. IMechE Part G: J. Aerospace Engineering*. 2012. Vol. 236. P. 243—259.
41. Caflisch R. E., Miksis M. J., Paranicolauro G. C., Ting L. Effective equations for wave propagation in bubbly liquids. *J. Fluid Mech*. 1985. Vol. 153. P. 259-273.
42. Camphell, I.J. and Pitcher, A.S. Shock waves in liquid containing gas bubbles. rep. RE/HY/17/0, Adm.Res. Lab., Teddington (U.K.) 1957
43. Cologni A.L., Mazzoleni M. and Previdi F. (2016). Modeling and Identification of an Electro-Hydraulic Actuator. 12th IEEE International Conference on Control and Automation. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7505299>.
44. Chamberlain T.R. Electrohydraulic actuator for aircraft control surfaces. US Patent No. 4,630,441.
45. Chakraborty I., Jackson D., Trawick D. Development of a Sizing and Analysis Tool for Electrohydrostatic and Electromechanical Actuators for the More Electric Aircraft. *Aviation Technology, Integration, and Operation Conference*. Los Angeles August 13-14, 2013. Los Angeles, CA. AIAA 4282.
46. Chinniah Y., Burton R. and Habibi S. Failure monitoring in a high performance hydrostatic actuation system using the extended Kalman filter. *Mechatronics*. 2006. Vol. 16, No. 10. P. 643–653.
47. Christmann M., Seemann S., Janker P. (2010). Innovative approaches to electromechanical flight control actuators and systems. *Recent advances in*

Aerospace Actuation Systems and Components. Toulouse May 5-7 2010, Toulouse, France. P.17-23.

48. Cochoy O., Hanke S., Carl U. Concepts for position and load control for hybrid actuation in primary flight controls. *Aerospace Science and Technology*. 2007. No. 11. P. 194-201.

49. Crowder R., and Maxwell C. Simulation of prototype electrically powered integrated actuator for civil aircraft. *Proc. Instn. Mech. Engrs*. 1998. Vol. 211, Part G. P. 381--394.

50. Darcy H. Recherches experimentsles relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaur. Paris: Mallet-Bachelier, 1857. 268 p. Available at: https://archive.org/details/bub_gb_a4reE52LFF0C/page/n11/mode/2up(accessed 10Dec:2023)(in French).

51. Davis J., Potier K., Medina R., Socheleau Jerome. EP 4 206 072 A1. Aircraft control surface with integrated hydraulic actuator. European Patent Application. Bulletin 2023/27.

52. Delale C.F., Tryggvason G. Shock wave structure in bubbly liquids: comparison of direct numerical simulation and model equations. *Shock Waves*. 2008. Vol. 17. P. 433-440.

53. Dinca L., Corcau J., Lungu M., Tudosie A. Mathematical models and numerical simulations for electro-hydrostatic servo-actuators. *International journal of circuits, systems, and signal processing*, 2008. Vol. 2, issue 4. P. 229—238.

54. Fadel M., Rabie M. and Youssef A. (2019). Motion control of aircraft electro-hydraulic servo actuator. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 2019, issue 610. pp. 012073. Doi:10.1088/1757-899X/610/1/01/2073.

55. Frischmeier, S. Electrohydrostatic Actuators for Aircraft Primary Flight Control – Types, Modelling and Evaluation. *5th Scandinavian International Conference on Fluid Power, SICFP '97*, Linköping, Sweden, May 28 -30 1997. <https://doi.org/10.15480/882.236>

56. Frolov S.,M., Avdeev K.A., Aksenov V.S., Borisov A.A., Frolov F.S., Shamshin I.O., Tukhvatullina R.R., Basara B., Edelbauer, W., Pachler K.

Experimental and computational studies of shock wave-to-bubbly water momentum transfer. *Int. J. of Multiphase Flow*. 2017, Vol.92. P. 20-38.

57. Ghidaoui M. S., McInnis D., A., Axworthy D. H. A review of Water Hammer Theory and Practice. *Applied Mechanics Reviews*. 2005. Vol. 58. P. 49-76. DOI: 10.1115/1.1828050.

58. Habibi S., Roach J., Luecke G. Inner-Loop Control for electromechanical (EMA) Flight Surface Actuation Systems. *Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control*. 2008. Vol. 130. P. 051002-1—0511002-13.

59. He T., Zhu D., Wang J., Wang Q. Experimental and Numerical Investigations of the Stribeck Curves for Lubricated Counterformal Contacts. *Journal of Tribology*. 2017. Vol. 139. P. 021505-1—021505-13.

60. Henclik S. Analytical solution and numerical study on water hammer in a pipeline with an elastically attached valve. *16th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, Apr 2016, Honolulu, United States. Hal-01884242.

61. Hersy M. The laws of lubrication of horizontal bearings. *Journal of Washington Academy of Sciences*. 1914. Vol. 4, No. 19. P. 542--552.

62. Hugoniot, H. Memoir on the propagation of movements in bodies, especially perfect gases (first part). *Journal de l'Ecole Polytechnique* (in French). 1887. No. 57. P. 3—97.

63. Hullender D.A. Alternative approach for Modelling Transients in Smooth Pipe With Low Turbulent Flow. *Journal of Fluid Engineering*, 2016. Vol. 138. P. 121202-121210.

64. Hussain H., Crassidis L., Kolodziej J. Verification and Validation of a Theoretical Model of Integrated Actuator package for Primary Flight Control. Rochester Institute of Technology. 2012. 161 p. (thesis)

65. Ijaz S., Hamayun M., Anwaar H., Yan L., Li M. LPV Modeling and Tracking Control of Dissimilar Redundant Actuation system for Civil Aircraft. *International Journal of Control, Automation and Systems*. 2019. Vol. 17(X). I-II. P. 1-11. <http://dx.doi.org/10.1007/s12555-017-0399-1>

66. Iurian C., Ikhoulane F., Rodellar J., Grino R. Identification of system with dry friction. Universitat Politecnica De Catalunya. Institute d'Organitzacio I Control de Sistemes Industrials. 2005. 46 p.
67. Jing H., Zhang D., Li G. Pressure variations of fluid transients in a pressurized pipeline. *Fluid Dynamics Research*. 2018. Vol. 50. P. 045514.
68. Joukowski N.E. Memories of Imperial Academy Society of St. Petrburg, 9(5). (Russian translated by O. Simin 1904) *Proc. Amer. Water Assoc.* Vol. 24. P. 341—424.
69. Kameda M., Shimauro N. and Higashino F. Shock waves in a uniform bubbly flow. *Physics of Fluids*. 1998. v. 10, No 10.
70. Kang R., Jiao Z., Wang S., Chen L. Design and Simulation of Electro-hydrostatic Actuator with a Built-in Power Regulator. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2009. Vol. 22. P. 700-706. Doi: 10.1016/S1000-9361(08)60161-2.
71. Keramat A., Tijsseling A.S., Hou Q., Ahmadi A. Fluid-Structure interaction with pipe-wall viscoelasticity during water hammer. *Journal of Fluids and Structures*. 2012. Vol. 28. P. 434-455.
72. Kliffken M.G., Gojny M.H. A unified control strategy for flight control actuators. *Recent advances in Aerospace Hydraulics*. Toulouse, France, November 24-25 1998. 7 p.
73. Kolpak E.P., Ivanov S.I. Mathematical and Computer Modeling Vibration Protection System with Damper. *Applied Mathematical Science*. 2015. Vol. 9, no. 78. P. 3875—3885.
74. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical handbook. Second edit. New-York: Mc. Graw-Hill Book Company, 1968. 943p.
75. Kutataladze S.S., Nakoryakov V.E., Sobolev V.V. and Shreiber I.R. Dynamics of shock waves in liquid containing gas bubbles. *Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Technicheskoi Fiziki*. 1974. No. 5. P. 67-71.
76. Lee J., Park S. and Kim J. Design and experimental evaluation of a robust position controller for an electrohydrostatic actuator using adaptive anti-windup sliding mode scheme. *The Scientific World Journal*. 2013. P. 590708.

77. Leushear R.A. Water hammer and Fatigue Corrosion –I—A Piping System Failure Analysis. *Leishear Engineering, LLC*. 2023. P. 1—19. DOI: 10.13140/R.G.2.2.19541.09449.
78. Li B., Liu Y., Tan C., Qin Q. and Lu Y. Review of electro-hydrostatic actuator: system configuration, design methods and control technologies. *Int. J. Mechatronics and Manufacturing Systems*. 2020. Vol. 13, No.4. P. 323--346.
79. Li Q.S., Asce M., Yang Ke., Zhang L. Analytical solution for Fluid-Structures interaction in liquid-filled pipes subjected to impact-induced water hammer. *Journal of Engineering Mechanics*. 2003. Vol. 129. P. 1408-1417.
80. Linyan S., Ali Y., Ashraf M., Mumtaz M., Baig W. Fixed structured H_{∞} Controller Design for Aircraft Control Surface driven by Power Wire Hydraulic Actuator. *Proceedings of 2017 14th International Bhurban Conference on Applied Sciences & Technology (IBCAST)*. Islamabad, Pakistan, 10th-14th January, 2017. P. 259—264.
81. Liu L., Wu Z. A new identification method of Stribeck friction model based on limit cycles. *Journal of Mechanical engineering Science*. 2014. Vol. 228(15). P. 2678-2683.
82. Lu J., Gu C., Zhao Y., Tan C., Lu Y., Fu C. Refined modelling method and Analysis of an Electromagnetic Direct-Drive Hydrostatic Actuation System. *Actuators*. 2022. No 111, 281 <https://doi.org/10.3390/act11100281>
83. Lukianov P.V., Pavlova K.S. Unsteady flow of droplet liquid in hydraulic systems of aircrafts and helicopters: models and analytical solutions. *Aerospace technics and technology*. 2024 No. 1. P. 32-42. DOI: 10.32620/aktt.2024.1.03.
84. Lukianov P.V., Pavlova K.S. Unsteady flow in bubble liquid in hydraulic system of aircraft and helicopters. *Aerospace technics and technology* .2024. No. 2. P. 4-14. DOI: 10.32620/aktt.2024.2.01.
85. Lukianov Pavlo, Pavlova K. Use of self-similarity to determine the initial distributions of the unknown values on the example of the flow-structure interaction problem. *Computer Hydromechanics: materials of IX Intern. Conf. Kyiv, October 1—2, 2024. Kyiv, 2024. p. 107-108.*

86. Lukianov P.V., Pavlova K.S. Nonlinear model of interaction of unsteady fluid flow with structure in hydraulic systems of aircraft and helicopters. *Aerospace technics and technology*. 2024. No. 4. P. 4-14. DOI: 10.32620/aktt.2024.4.01.
87. Meghashyam R. B. Mathematical Modeling of Electro-Hydraulic load (Actuator) simulator for Aircraft applications. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*. 2020.Vol IX, issue IX,. P.13—19.
88. Menabrea L.F. Note sur les effets de choc de l'eau dans les conduits. *C.R. Hebd. Seances Acad. Sci.* 1885. Vol. 47, July-Dec. P. 221—224.
89. Michaud J. Coup de belier dans les conduits. Etude des moyens employes pour en atteneur less effects. *Bull. Soc. Vnadeis Ing. Arch.* 1878. Vol 4(3.4). P. 56—64, 65--77.
90. Mohanty A. and Yao B. Indirect adaptive robust control of hydraulic manipulators with accurate parameter estimates, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2010. Vol. 19. No. 3. P. 567–575.
91. Nakoryakov V.E., Kuznetsov V.V., Dontsov V.E. and Marcov P.G. Pressure wave of moderate intensity in liquid with gas bubble. *Int. J. Multiphase Flow*. 1990. Vol. 16, No. 5. P. 741-749.
92. Nakoryakov V.E., Sobolev V.V. and Schreiber I.R. Longwave perturbations в gas-liquid mixture. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza*. 1972. No. 5. P. 71-76.
93. Nigmatulin, R.I. *Dynamics of multiphase media*. Hemisphere, 1991.
94. Nisar, Z., Munawar, H. System Identification and Controller Desighn for Hydraulic Actuator. (in review)
95. Olsson O. Astrom K., Canudas de Wit C., Gafvert M., Lischinsky P. Friction Models and Friction Compensation. *European Journal of Control*. 1998. Vol. 4, No. 3. P. 176—195.
96. Padmanabham M. Shock wave formation in flowing bubbly mixtures by steepening of compression waves. *Int. J. Multiphase Flow*. 1978. Vol. 4. P. 81-88.
97. Poláše T. , Hružík L., Bureček A., Ledvoň M. Experimental Analysis

of Flow Through Throttle Valve During Gaseous Cavitation. MATEC Web of Conferences 369, 02008 (2022). doi.org/10.1051/mateconf /202236902008

98. Qiao G., Liu G., Shi, Zh., Wang Y., Ma S., Lim, T. C. A review of electromechanical actuators for More/All Electric aircraft systems. *Journal of Mechanical Engineering Science*. 2018. Vol. 232 (22). P. 4128-4154.

99. Rankine W.J.M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbances. *Philosophical Transactions of Royal Society of London*. 1870. Vol. 160. P. 277—288.

100. Rehman W., Wang X., Chang Y., Chai H., Hameed Z. Wang X., Saleem F., Lodhi E. Motion synchronization for the SHA/EMA hybrid actuation system by using an optimization algorithm. *Journal for Control, Measurement, Electronic, Computing and Communications*. 2021. Vol. 62, No. 3-4, P. 503-512. <https://doi.org/10.1080/0051144.2021.1989891>.

101. Rimann B. Ueber die Fortpflanzung ebender Luftwellen von endlicher Schwingangsweite. *Gesammelte Werke*. 1876, P. 145.

102. Riemann B. Ueber die Fortpflanzung Ebener Luftwellen von Endlicher Schwingungsweite (German Edition). Leopold Classic Library Publ., 2017. 32 p.

103. Rongjie K., Zongxia J., Shaoping W., Lisha C. Design and Simulation of Electro-hydrostatic Actuator with a Built-in Power Regulation. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2009. Vol. 22. P. 700-706.

104. Seung S. and Kwak H.Y. Shock wave propagation in bubbly liquids in small gas volume fractions. *Journal of Mechanical Science and technology*. 2017. Vol. 31(3). P. 1223-1231.

105. Shang Y., Jiao Z., Wang X., Zhao S. Study of Friction Torque Loading with an Electro-hydraulic Load Simulator. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2009, No. 6. P. 691—699.

106. Skalakov R. An extension of the Theory of water hammer, part 1. *Water Power*. 1955, No.12 p. 105-116.

107. Skalakov R. An extension of the Theory of water hammer, part 2. *Water Power*. 1956, Vol. 78, No.1 p. 105-115.

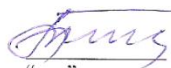
108. Sobey R.J. Analytical solution for unsteady pipe flow. *Journal of Hydroinformatics*. 2004. Vol. 06.3. P. 207.
109. Su H., Sheng L., Zhao S., Lu C., Zhu R., Chen Y., Fi Q. Water Hammer Characteristics and Component Fatigue Analysis of the Essential Service Water System in Nuclear Power Plants. *Processers*. 2023. Vol. 11. P. 3305. DOI: 10.3390/pr11123305.
110. Tijsseling A.S. Exact solution of linear hyperbolic four-equation system in axial liquid-pipe vibration. *Journal of Fluids and Structures*. 2003. Vol. 18. P. 176-196. Doi:10.1016/j.jfluidstructs.2003.07.01
111. Ulinowicz M., Narkiewicz J. Modeling and Identification of Actuator for Flap Deflection. *Journal of Automation, Mobile Robotics & Intellectual Systems*. 2011. Vol. 5, No. 4. P. 35--40
112. Urbanowicz K., Firkowski M., Bergant A. Comparing analytical solutions for unsteady laminar pipe flow. *BHR Group Pressure Surges*. 2018. Vol. 13. P. 283-303.
113. Van Wijngaarden L. The structure of shock waves in liquid-bubble mixtures. *Appl. SCI. Res*. 1970. Vol. 22, July. P. 366-381.
114. Vardy A.E., Brown J.M.B. Transient, turbulent, smooth pipe flow. *Journal of Hydraulic Research*. 1995. 256 IAHR, 33(4). P. 435-456.
115. Vitkovsky J.P., Bergant A., Simpson A.R. , and Vardy A.E., Lambert M.F. Systematic evaluation of one-dimensional unsteady friction models in simple pipelines. *J. Hydraul. Eng*. 2006. 132(7). P. 696-708.
116. Walters W.T., Leishear R.A. When the Joukowski Equation Does Not Predict Maximum Water Hammer Pressure. *Journal of Pressure Vessel Technology*. Vol.141. P. 060801-1—060801-10.DOI: 10.1115/1.4044603.
117. Watanabe M. and Prosperetti A. Shock waves in dilute bubbly liquids. *J. Fluid Mech*. 1994. Vol. 274. P. 349-381.
118. Weisbach J. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, Vol. 1. Theoretische Mechanik. Braunschweig: Vieweg und Sohn, 1845. 535 p.

119. Weisbach, J. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, Vol. 1. Theoretische Mechanik. Braunschweig: Vieweg Publ., 1855. 946 p. Available at: <https://www.digitale-sammlungen.de>.
120. Wiggert D.C., Tijsseling A.S. Fluid transient and fluid-structure interaction in flexible liquid-filled piping. *Applied Mechanics Review*. 2001. Vol. 9. P. 455-481. doi:10.1115/1.1404122
121. Williams R. Airplane landing gear . Report on ME 3011 Kinematics and Dynamics of Machines Capstone Term Project . July 31, 2020. 57 p.
122. Xiaoming Yuan, Weiqi Wang, Xuan Zhu, Lijie Zhang. Theoretical Model of Dynamic Bulk Modulus for Aerated Hydraulic Fluid. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. 2022. Vol. 35. Article number: 121.
123. Zeman P., Kemmetmueler W., Kugi A. Mathematical Modeling and Analysis of Hydrostatic Drive Train. *IFAC – Paper OnLine*. 2015. Vol. 48—1. P. 508—513.
124. Zeman P., Kemmetmueler W., Kugi A. Energy-efficient Constrained Control of Hydrostatic Power Split Drive *IFAC – Paper OnLine*. 2017. Vol. 50—1. P. 4775—4780.
125. Zhou G., Feng T., Lu X. and Liu L. Parameter identification of electro-hydrostatic actuator based on particle swarm optimization. *Journal of Physics Conference Series*. 2020. Vol. 1486. P. 032031.
126. Zielke W. Frequency—Dependent Friction in Transient Pipe Flow. *Journal of Basic Engineering, ASME*. 1968. Vol. 90(J). P. 109-115.
127. Zwick S.A. Behavior of small permanent gas bubble in a liquid. *J. Math. And Phys.* 1958. Vol. 37, No. 3. P. 246.

Додаток 1

“ПОГОДЖЕНО”

Проректор з навчальної роботи

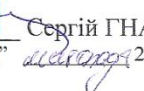
 Анатолій ПОЛУХІН
“ ” 2024 р.

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор з наукових досліджень
та трансферу технологій
Державного некомерційного
підприємства

Державний університет «Київський
авіаційний інститут»

доктор технічних наук, професор

 Сергій ГНАТЮК
М.П. 2024 р.



про впровадження дисертаційної роботи “Моделювання фізичних процесів в системах керування авіаційної та ракетно-космічної техніки” у навчально-виховний процес Державного некомерційного підприємства «Державний університет «Київський авіаційний інститут»

Результати дисертаційної роботи Павлової Катерини Сергіївни за темою “Моделювання фізичних процесів в системах керування авіаційної та ракетно-космічної техніки”

Комісія у складі :

Голова комісії	ПІБ Свирид Михайло Миколайович	Ступінь, звання, займана посада к.т.н., доцент, заступник декана
Члени :	Терещенко Юрій Матвійович Бадах Валерій Миколайович Семінівська Таїсія Олексіївна	д.т.н. , професор, завідувач кафедри к.т.н., с.н.с., завідувач кафедри к.т.н., доцент, доцент кафедри АД і БП

яка діє на підставі розпорядженням декана Аерокосмічного факультету Національного авіаційного університету від «06__»_11__2024 р. №_42____, засвідчує, що результати дисертаційної роботи Павлової Катерини Сергіївни за темою **“Моделювання фізичних процесів в системах керування авіаційної та ракетно-космічної техніки”** впроваджені у навчальний процес кафедри гідрогазових систем та конструкцій ЛА у

Лабораторному практикуму з курсу « Моделювання та розрахунок робочих процесів в рідинно-газових системах ЛА».

Голова комісії

М.М..Свирид

Підпис

Члени комісії:

Ю. М. Терещенко

Підпис

В.М. Бадах

Підпис

Додаток 2

ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ

Результати дисертаційного дослідження аспірантки Павлової Катерини Сергіївни на тему *“Моделювання фізичних процесів в системах керування авіаційної та ракетно-космічної техніки”* на здобуття ступеню доктора філософії за спеціальністю 134 -- Авіаційна та ракетно-космічна техніка впроваджені в освітній діяльності випускових кафедр Гідрогазових систем, Підтримання льотної придатності і Технологій аеропортів АКФ Державного некомерційного підприємства «Державний університет «Київський авіаційний інститут», а саме у навчальній програмі з курсу *“Гідравліка та гідропневмопристрої авіаційної техніки”* (тема: «Гідравлічний удар»).

Декан АКФ



Святослав ЮЦКЕВИЧ